



KONSTRUKCJE ZA POMOCĄ CYRKLA

Ćwiczenia
Czas: 90'

TWIERDZENIE MOHRA-MASCHERONIEGO

jeżeli dana konstrukcja geometryczna jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest wykonalna za pomocą samego cyrkla, pod warunkiem, że ograniczymy się do wyznaczania punktów konstrukcji, a pominiemy rysowanie linii.

1. Wynik ten został opublikowany w roku 1672 przez Georga Mohra, był jednak nieznanym aż do roku 1928.
2. Niezależnie od Mohra twierdzenie zostało odkryte przez Lorenzo Mascheroniego w roku 1797.

WYBRANE PRZYKŁADY KONSTRUKCJI CYRKLEM

Dany jest odcinek AB

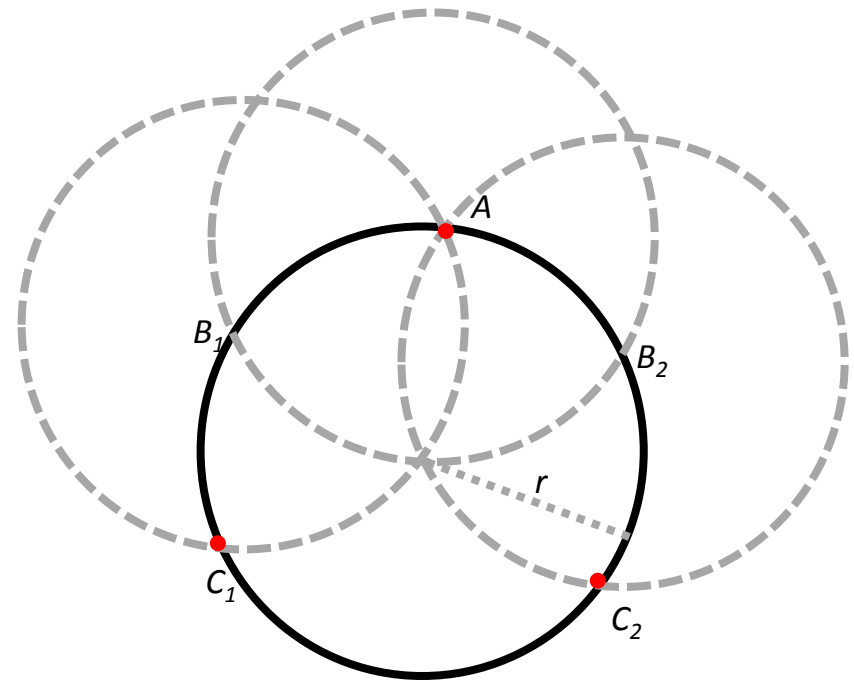
(znane są jedynie końcówki tego odcinka).

1. Arytmetyka:
 - Skonstruuj odcinki 2, 3, 4 ... razy dłuższe niż AB
 - Skonstruuj odcinki 2, 3, 4 ... razy krótsze niż AB
2. Dla punktu C nieleżącego na prostej AB, skonstruuj punkt D symetryczny do C względem AB.
 - Okrąg jest dany w postaci promienia R i środka O leżącego na AB. Wyznacz punkty przecięcia AB z okręgiem.
 - Sprawdź, czy 3 punkty leżą na jednej prostej
3. Znaleźć dowolny punkt C taki, że AC jest prostopadły do AB
4. Dane są trzy niewspółliniowe punkty A, B, C, skonstruuj równoległobok ABCD
5. Dwa punkty A, B leżą na okręgu o znanym środku O. Znaleźć środki obu łuków AB
6. Dane są trzy odcinki o długościach a, b, c. Skonstruuj odcinek x taki, że $a/b = c/x$
7. Znaleźć punkt przecięcia dwóch odcinków AB i CD znając jedynie końcówki tych odcinków.
8. Skonstruuj środek danego okręgu
9. Okrąg jest dany w postaci promienia R i środka O. Znaleźć 4 punkty na tym okręgu, które dzielą okrąg na cztery równe łuki (problem Napoleona)
10. Skonstruuj pięciokąt foremny
11. Skonstruuj punkt inwersyjny do danego punktu względem danego okręgu.

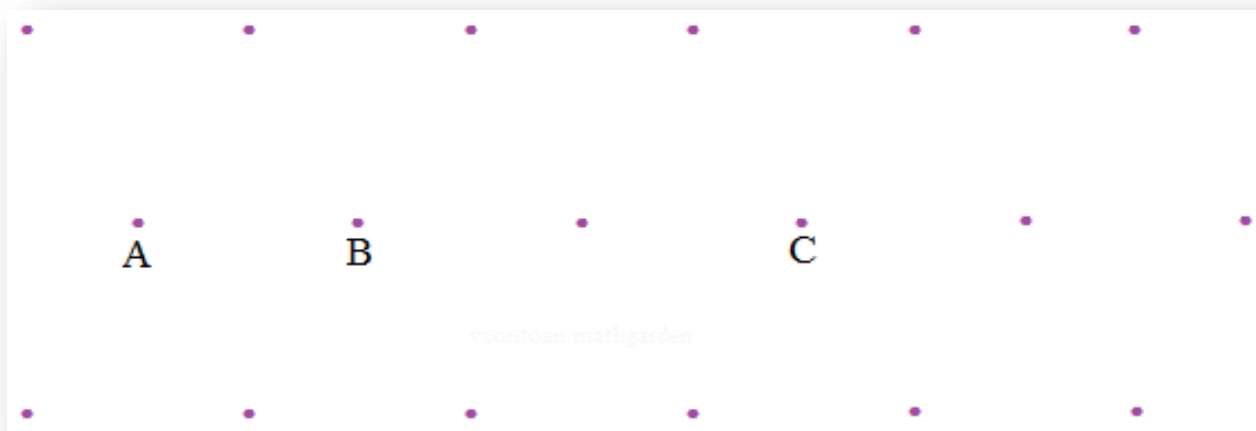
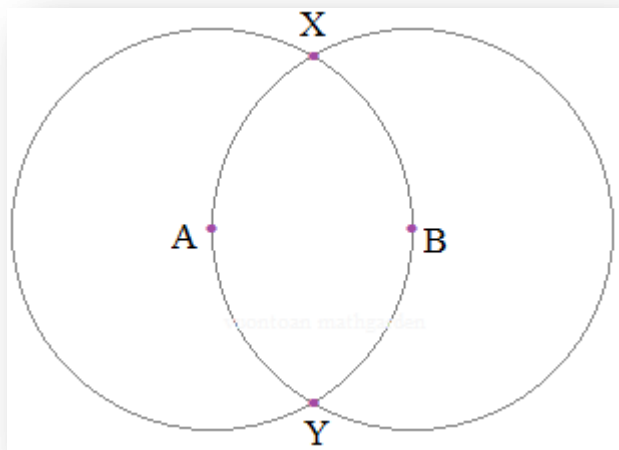
DZIELENIE OKRĄG NA 3 RÓWNE ŁUKI – PODSTAWOWA KONSTRUKCJA CYRKLEM

Mając do dyspozycji okrąg o promieniu r :

1. obieramy na nim w dowolnym miejscu punkt A i wykreślamy okrąg o promieniu r .
2. Powstaną nam dwa miejsca przecięcia B_1 i B_2 .
3. W tych punktach wykreślamy znów dwa okręgi o promieniu r .
4. Okręgi te przetną okrąg wyjściowy w punktach C_1 i C_2 .
5. AC_1C_2 to trójkąt foremny.



WIELOKROTNOŚĆ DANEGO ODCINKA

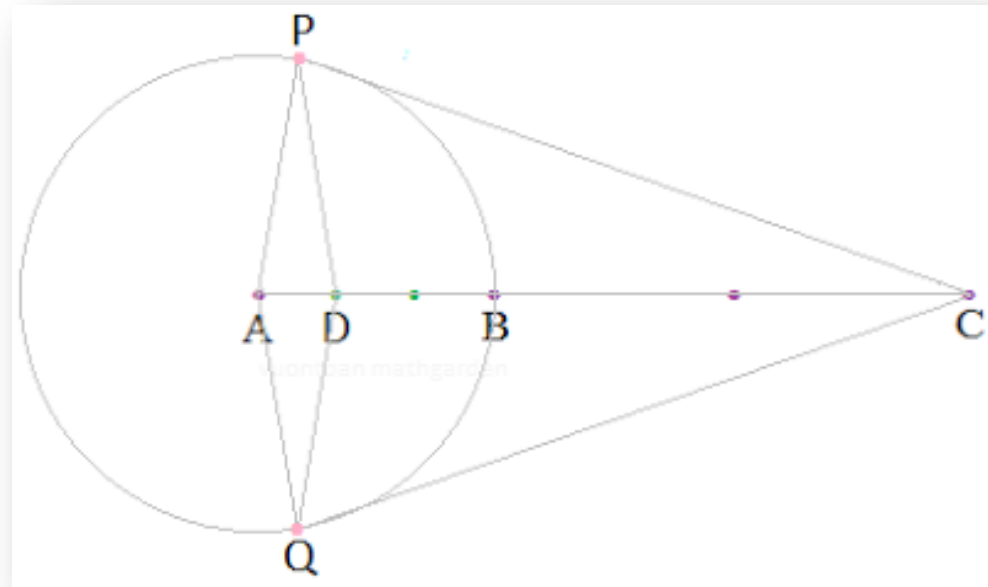


DZIELENIE ODCINKA NA K RÓWNYCH CZĘŚCI

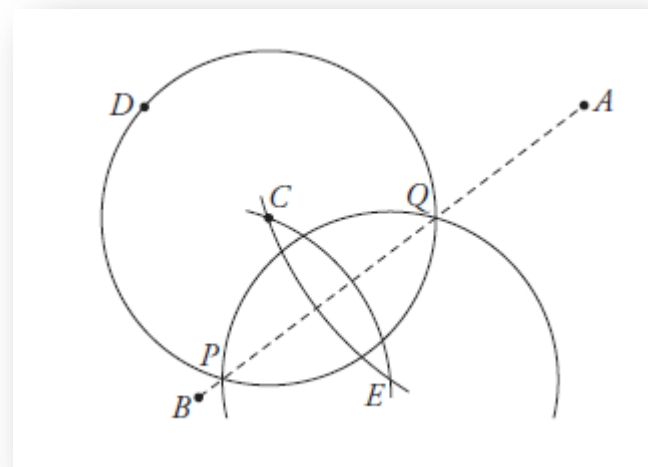
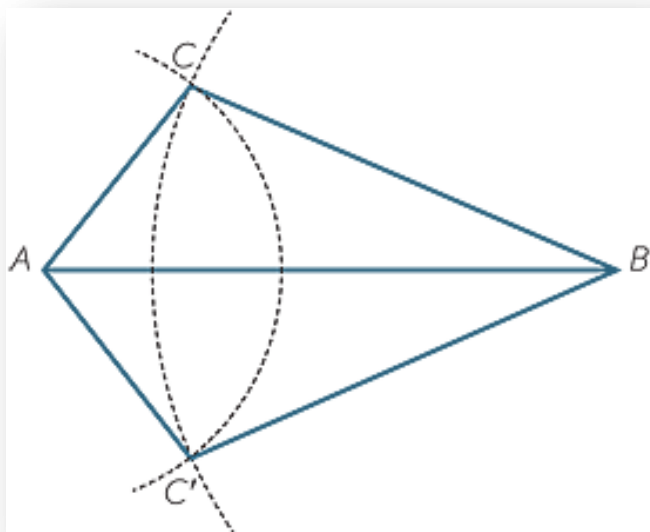
Dane są 2 punkty A, B .

1. Skonstruować punkt C taki, że $AC = k \cdot AB$
2. Okręgi $(A, |AB|)$ i $(C, |CA|)$ przecinają się w P i Q .
3. Okręgi $o(P, |AB|)$ i $(Q, |AB|)$ przecinają się w A i D
4. Wówczas $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{k}$

Więc, dla każdej liczby naturalnej k , możemy podzielić odcinek AB na k równych części.

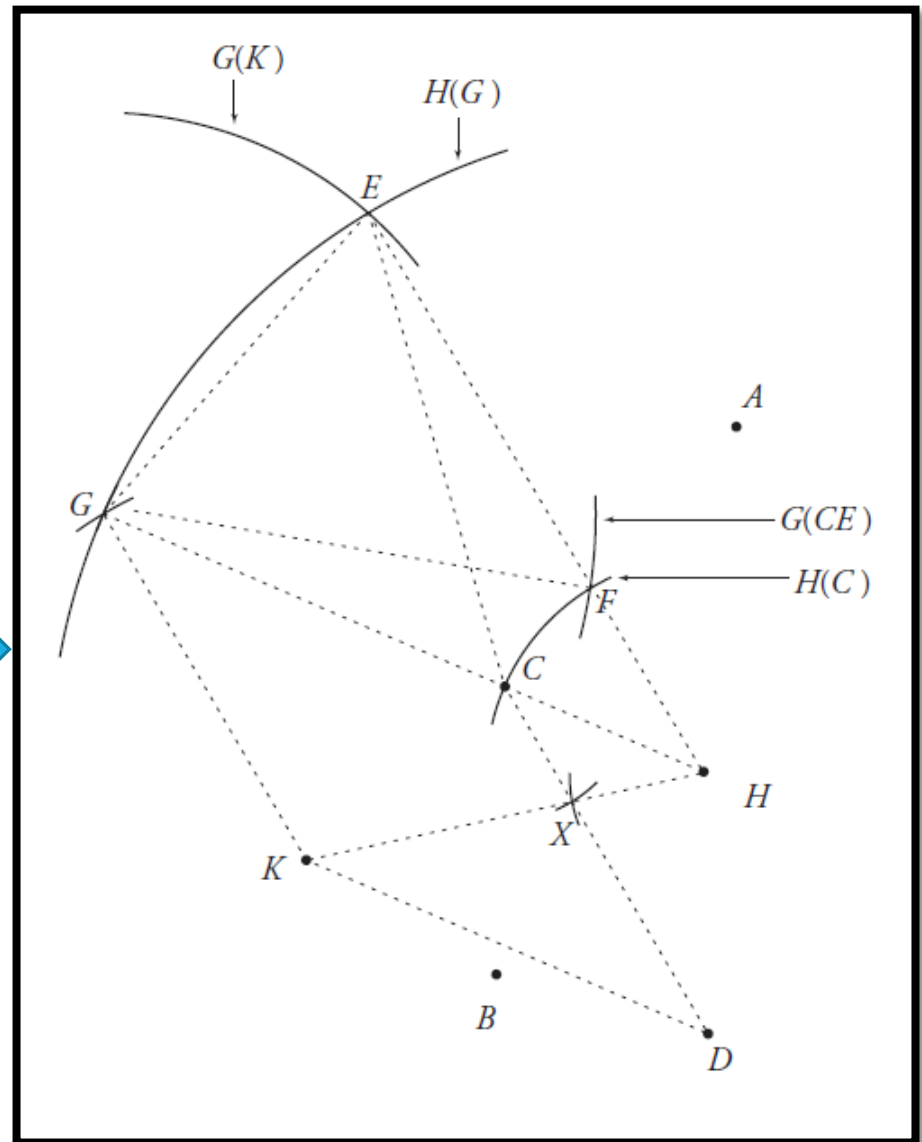
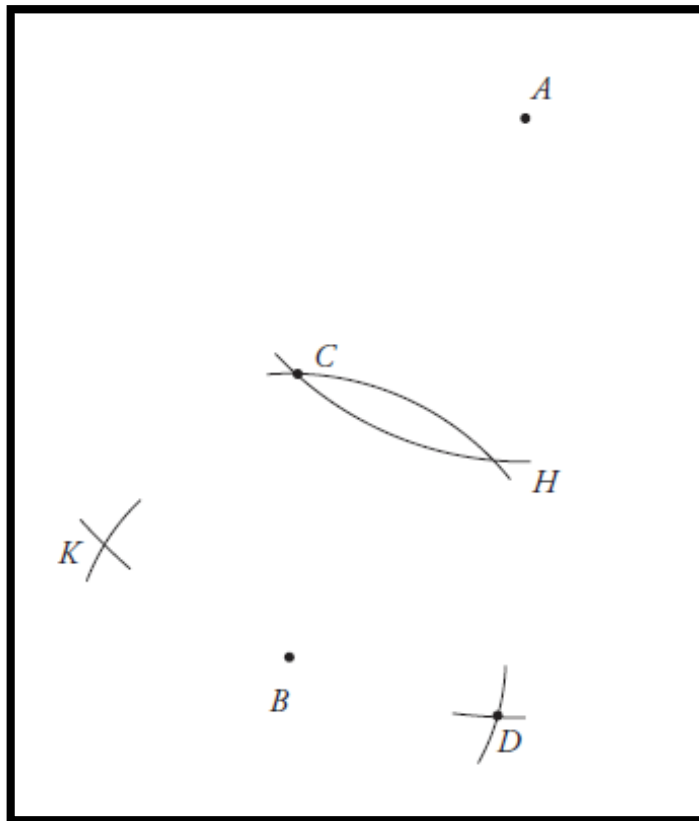


PUNKT SYMETRYCZNY, PUNKTY PRZECIĘCIA PROSTEJ Z OKRĘGIEM



PUNKT PRZECIĘCIA DWÓCH ODCINKÓW

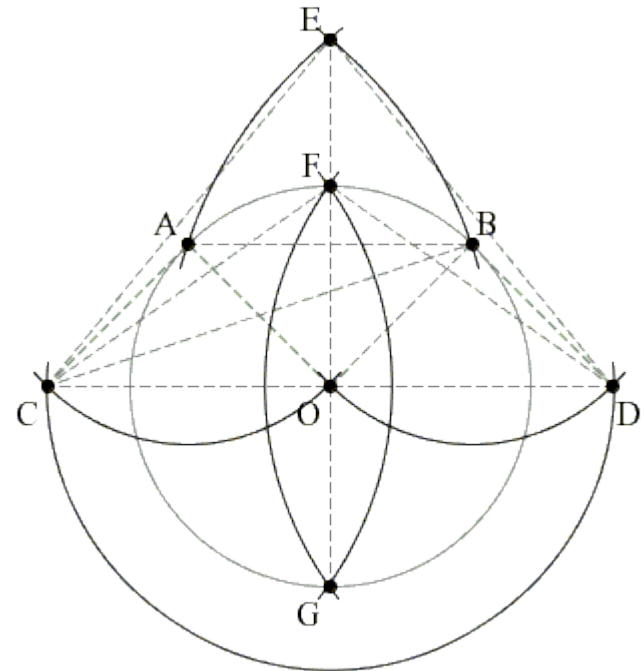
Dane są 4 punkty A, B, C, D .
Znaleźć punkt przecięcia
odcinków AB i CD



ŚRODKI ŁUKÓW

Dane są punkty A, B na okręgu o środku (O, r)

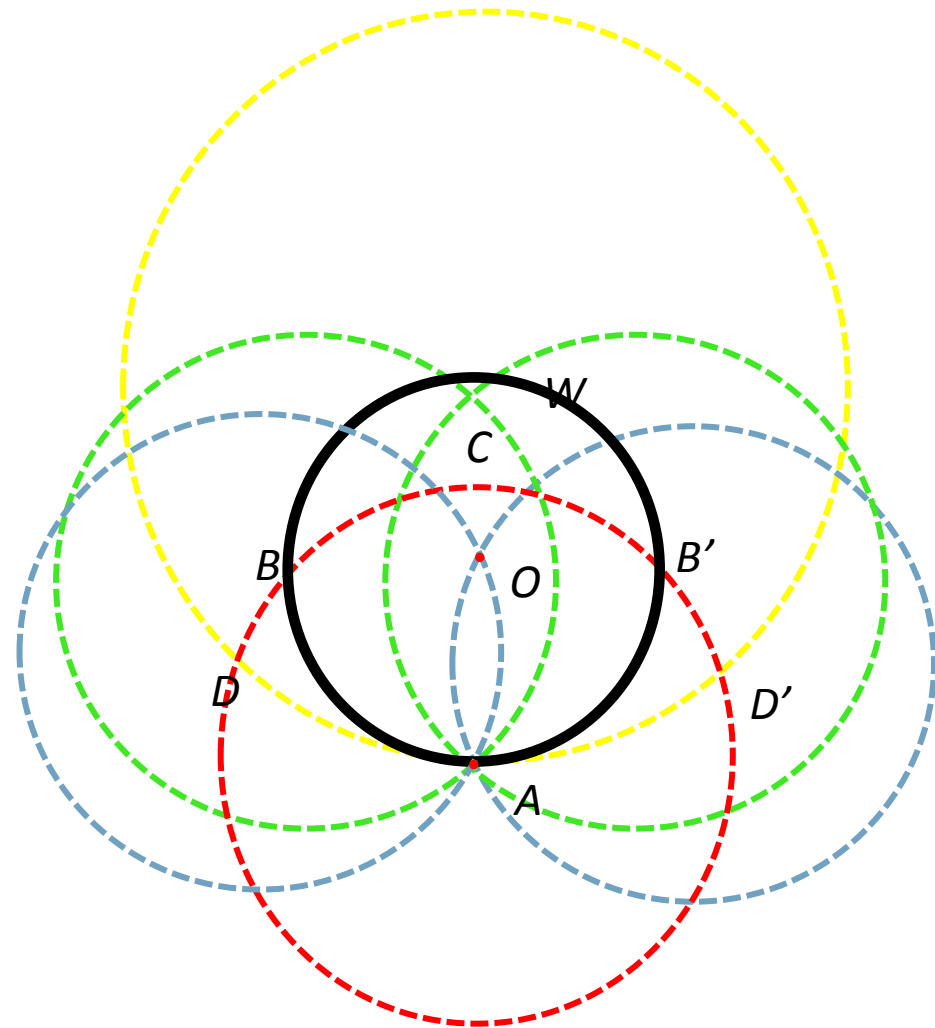
1. Skonstruujemy równoległoboki: $ABOC$ i $OABD$.
2. Narysujemy 2 okręgi o środkach w C i D i promieniu $|CB| = |DA|$.
3. Niech E będzie punktem przecięcia tych okręgów.
4. Okręgi o promieniu $|OE|$ i o środkach w C i D przecinają się w punktach E i F będących środkami łuków AB .



WYZNACZANIE ŚRODKA ZNANEGO OKRĘGU

Niech okrąg W będzie okręgiem, w którym szukany jest jego środek. Punkt A jest dowolnym punktem leżącym na okręgu W .

1. Punkty B i B' to punkty przecięcia okręgu o środku w A z okręgiem wyjściowym W .
2. Punkt C jest punktem przecięcia różnym od A dwóch okręgów o środkach w B oraz B' i promieniu AB .
3. Punkty D i D' są punktami przecięcia okręgu o środku w C i promieniu AC z okręgiem o środku w punkcie A i promieniu AB .
4. Punkt O jest różnym od A punktem przecięcia okręgów o środkach w D i D' i promieniu AD . Jest to środek okręgu W .

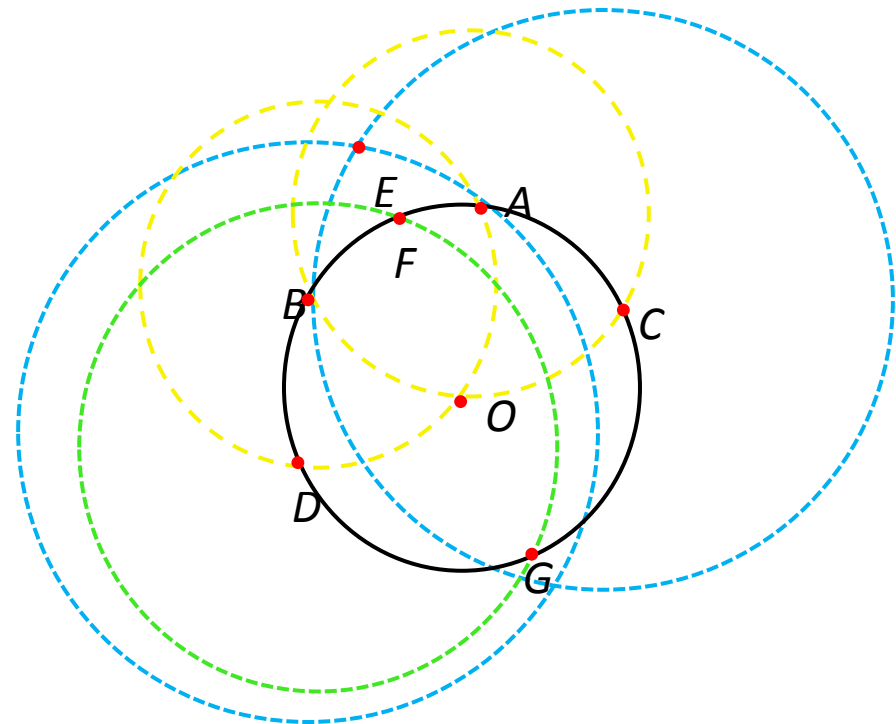


KWADRAT – KONSTRUKCJA CYRKLEM

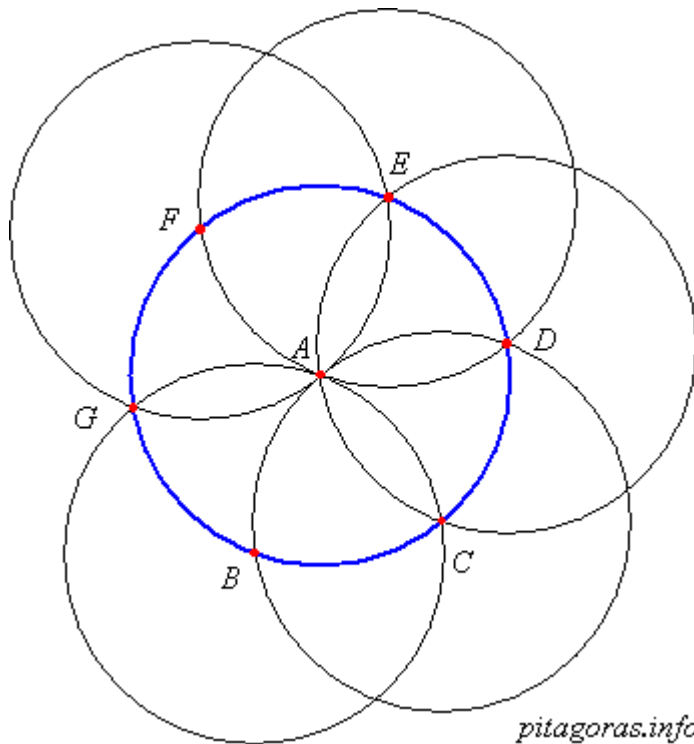
Zadanie to znane jest też jako problem Napoleona (matematyk-amator), podobno zadał je on swoim żołnierzom jako łamigłówkę.

1. Mamy do dyspozycji okrąg o środku O .
2. Kreślimy okrąg o środku w dowolnym punkcie A z okręgu zawierający punkt O , przecina on nasz okrąg w punktach B i C .
3. Następnie okrąg o środku w B zawierający O , który przecina okrąg w D i A (żółte).
Należy zauważyć, że długości $OA, OB, OC, OD, AB, AC, BD$ są równe długości promienia.
4. Następnie wykreślamy okręgi o środku w D i promieniu AD oraz o środku w C i promieniu CB , które przecinają się w punkcie E (niebieskie).
5. Okrąg o środku w D i promieniu równym OE (zielony) przecina okrąg wyjściowy w punktach F oraz G .

6. Czworokąt $FCGD$ jest kwadratem, a łuki FC, CG, GD, DF okręgu są wszystkie równe czwartej części obwodu.



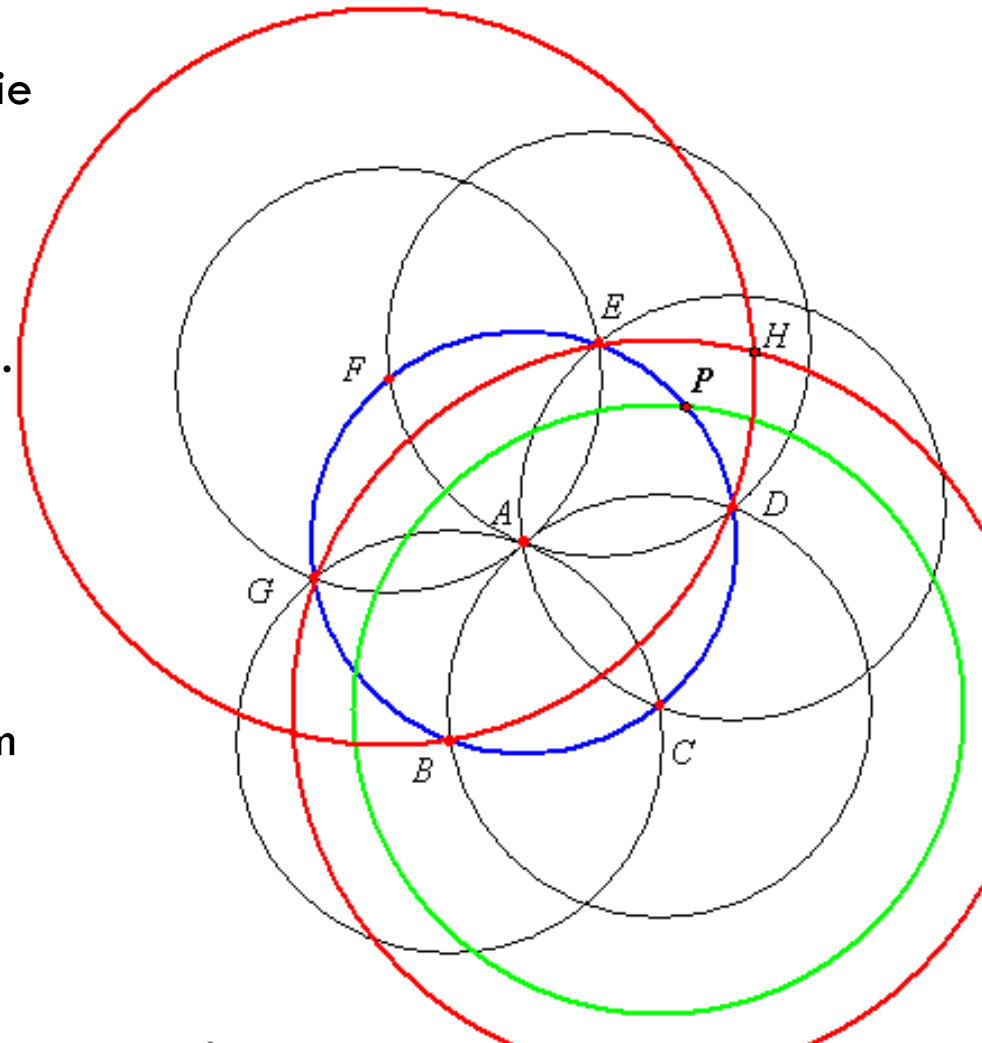
PIĘCIOKĄT FOREMNY – CYRKLEM (I)



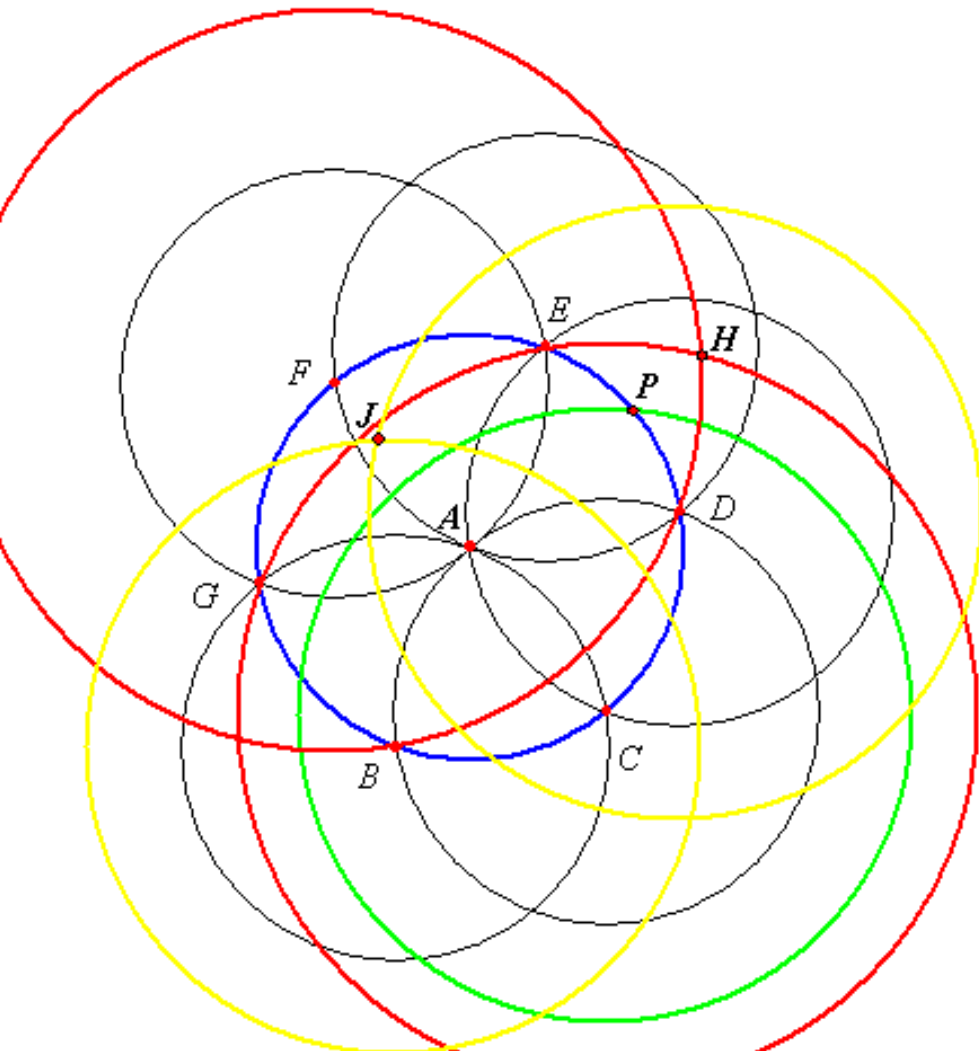
1. Rysujemy cyrklem dowolny okrąg o środku A, na jego obwodzie kreślimy kolejne okręgi o tym samym promieniu wyznaczając w ten sposób punkty B, C, D, E, F, G, które stanowią wierzchołki **sześciokąta foremnego**.

PIĘCIOKĄT FOREMNY – CYRKLEM (II)

2. Rysujemy dwa okręgi jeden o środku w punkcie C i promieniu CG oraz drugi o środku w punkcie F i promieniu FB (na rysunku czerwone).
3. Jeden z punktów przecięcia się tych okręgów oznaczamy literą H .
4. Następnie zakreślamy cyrklem okrąg o środku w punkcie C i promieniu AH (okrąg zielony), i oznaczamy literą P jeden z punktów przecięcia się tego okręgu z pierwszym narysowanym okręgiem o środku A .



PIĘCIOKĄT FOREMNY – CYRKLEM (III)



5. Wyznaczony odcinek odkładamy cyrklem na obwodzie naszego pierwszego okręgu otrzymując pięć wierzchołków pięciokąta foremnego.

W ten sposób wyznaczony odcinek PJ będzie bokiem pięciokąta foremnego, który może być wpisany w pierwszy narysowany okrąg o środku w punkcie A.

6. Natomiast odcinek AJ będzie bokiem dziesięciokąta foremnego, który może być wpisany w tym samym okręgu. Podobnie można wyznaczyć wierzchołki dziesięciokąta foremnego odkładając na okręgu wyznaczony wyżej odcinek AJ