

METODY KONSTRUKCJI ZA POMOCA CYRKLA

WYKŁAD 1
Czas: 45'

TWIERDZENIE PONCELETA-STEINERA

*W roku 1833, Szwajcarski matematyk **Jakob Steiner** udowodnił, że wszystkie klasyczne konstrukcje (za pomocą cyrkla i linijki) mogą być wykonane bez użycia cyrkla o ile na płaszczyźnie mamy zadany okrąg wraz z jego środkiem.*

TWIERDZENIE STEINERA – IDEA DOWODU

Wystarczy udowodnić, że następujące operacje są wykonywane przy podanych warunkach:

- ❑ (1S) konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danej prostej.
- ❑ (2S) konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej.
- ❑ (3S) wyznaczanie punktu na prostej oddalonego od pewnego punktu na tej prostej o zadaną odległość.
- ❑ (4S) Konstrukcja czwartego odcinka proporcjonalnego do trzech innych odcinków;
- ❑ (5S) Konstrukcja odcinka o długości \sqrt{xy} z odcinków o długościach x, y .

<https://www.geogebra.org/material/simple/id/265033>

PRZYKŁADOWE KONSTRUKCJE ZA POMOCĄ LINIJKI

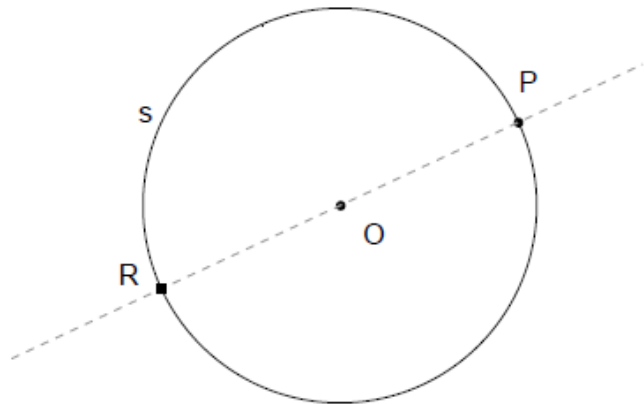
W poniższych konstrukcjach zakładamy, że dany jest okrąg i jego środek O .

- Symetria względem punktu O
- Prosta równoległa do danej prostej
- Wznaczenie środka odcinka
- Odcinek przystający do danego
- Obraz punktu przez jednokładności
- Środek jednokładności
- Prosta prostopadła do danej
- Punkty styczności
- Punkt przecięcia prostej z okręgiem
- Punkt przecięcia dwóch okręgów

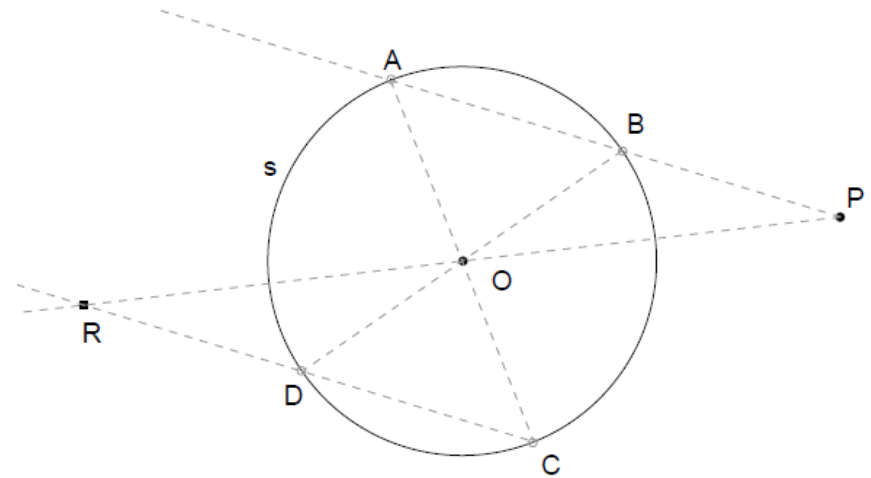
SYMETRIA ŚRODKOWA

Postępując się jedynie linijką znaleźć punkt R będący obrazem zadanego punktu P przy symetrii środkowej względem punktu O .

#1: P leży na okręgu

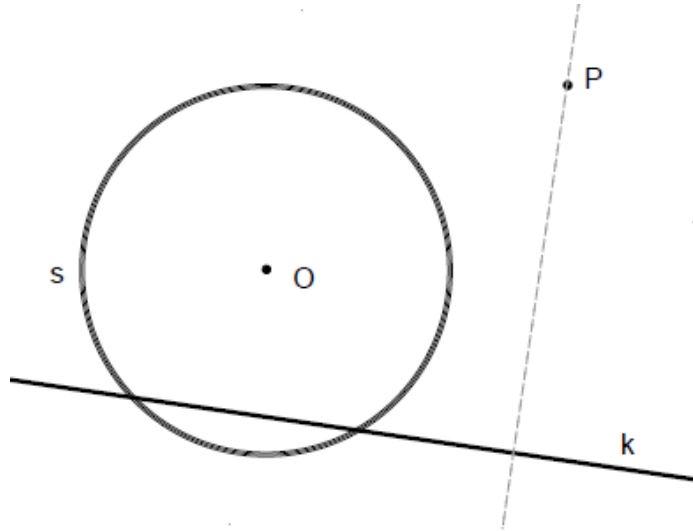


#2: P nie leży na okręgu

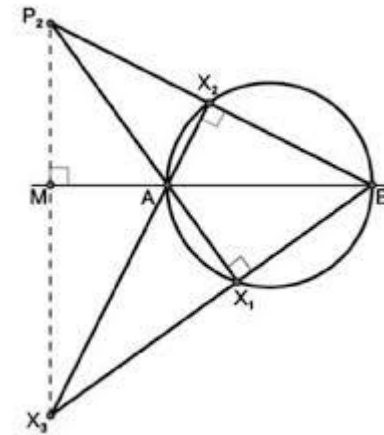


PROSTA PROSTOPADŁA DO DANEJ

Dany jest okrąg o środku O , prosta k i punkt P . Postępując się jedynie linijką poprowadzić przez punkt P prostą prostopadłą do prostej k .

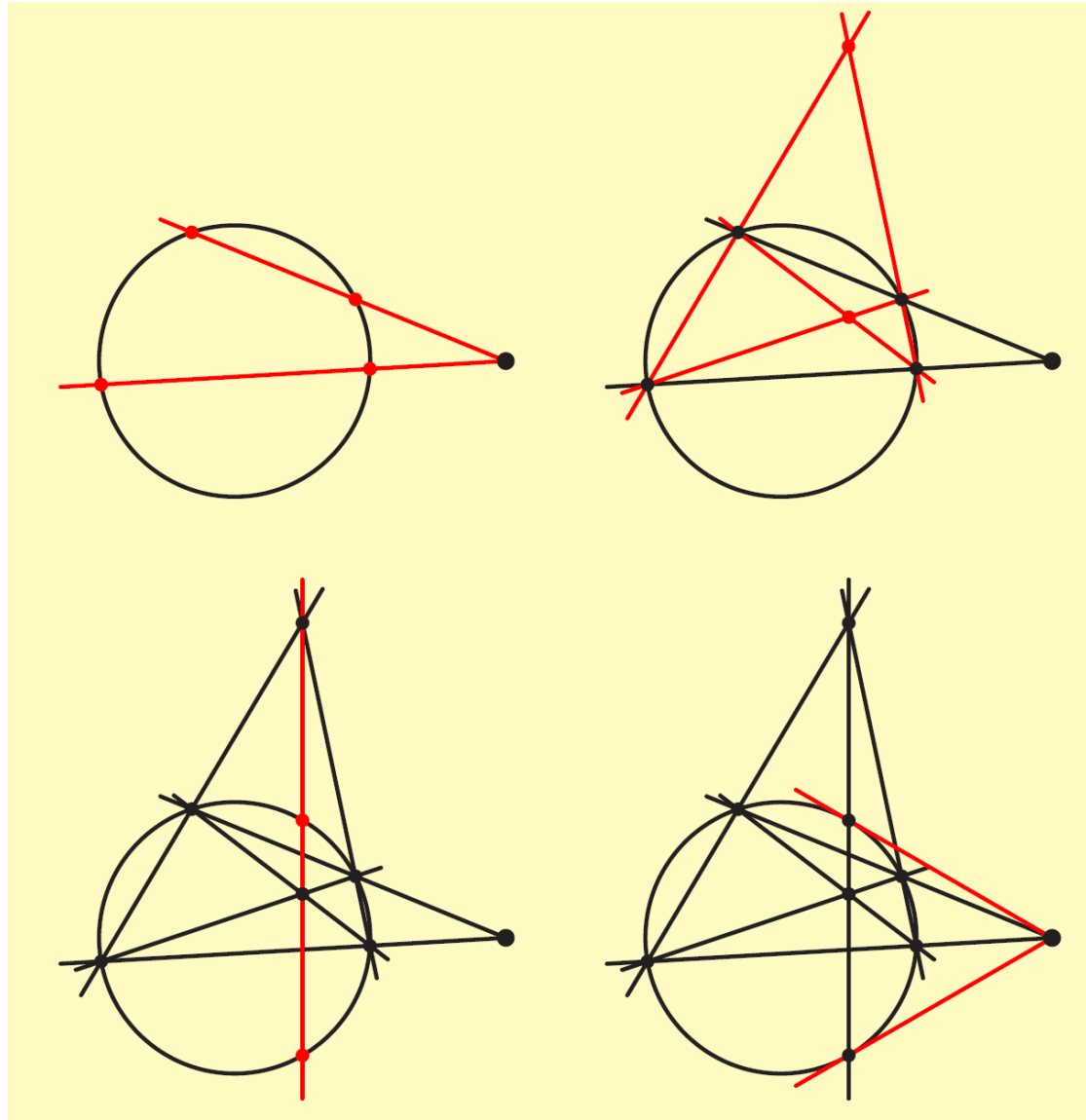
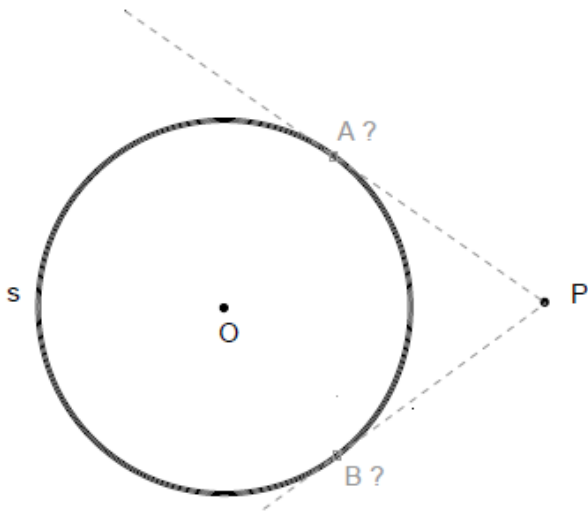


Przykładowa konstrukcja prostopadłej gdy prosta k przechodzi przez środek O



STYCZNE DO DANEGO OKRĘGU

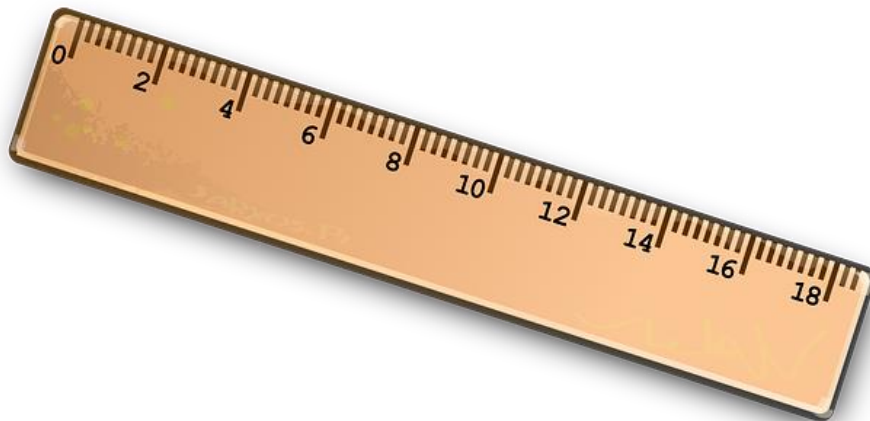
*Dany jest punkt P leżący na zewnątrz okręgu s .
Postępując się jedynie linijką skonstruuj proste AP i BP będące stycznymi do tego okręgu*



INNE PROBLEMY KONSTRUKCJI

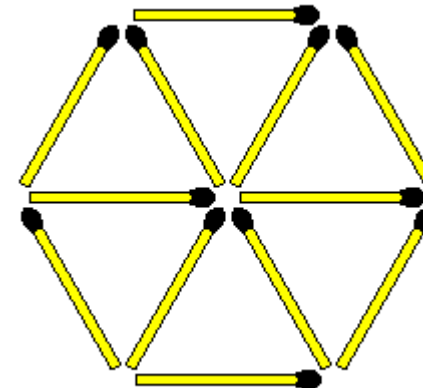
Linijka o równoległych krawędziach:

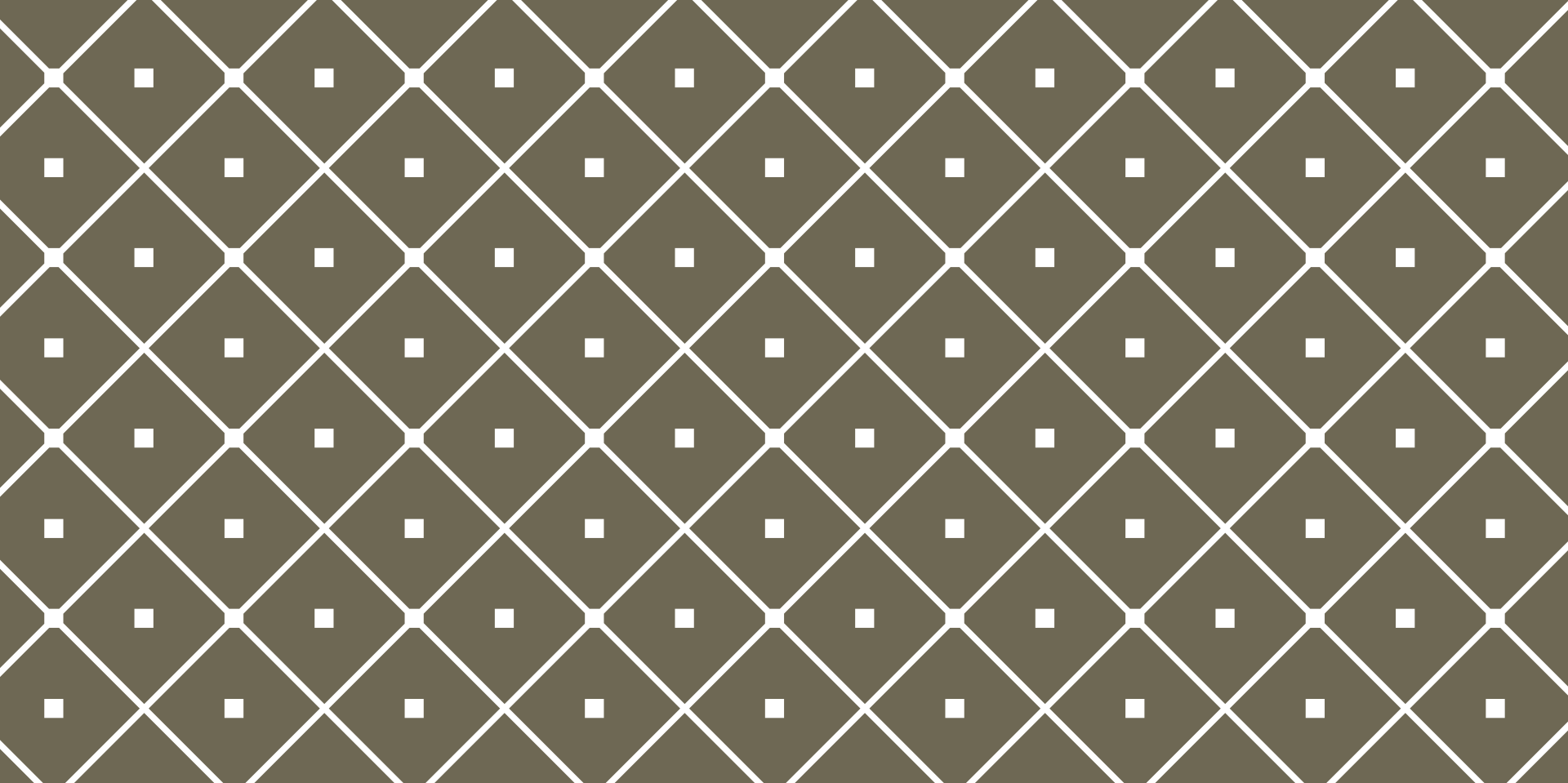
- konstrukcja dwusiecznej kąta
- konstrukcja symetralnej danego odcinka
- Konstrukcja prostej równoległej i prostopadłej do danej prostej



Zapałki:

- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja odcinka k razy dłuższego niż dany odcinek.
- Konstrukcja prostej przechodzącej przez punkt i równoległej do danej
- Konstrukcja kwadratu o boku równej zapałki.
- Podział zapałki na pół



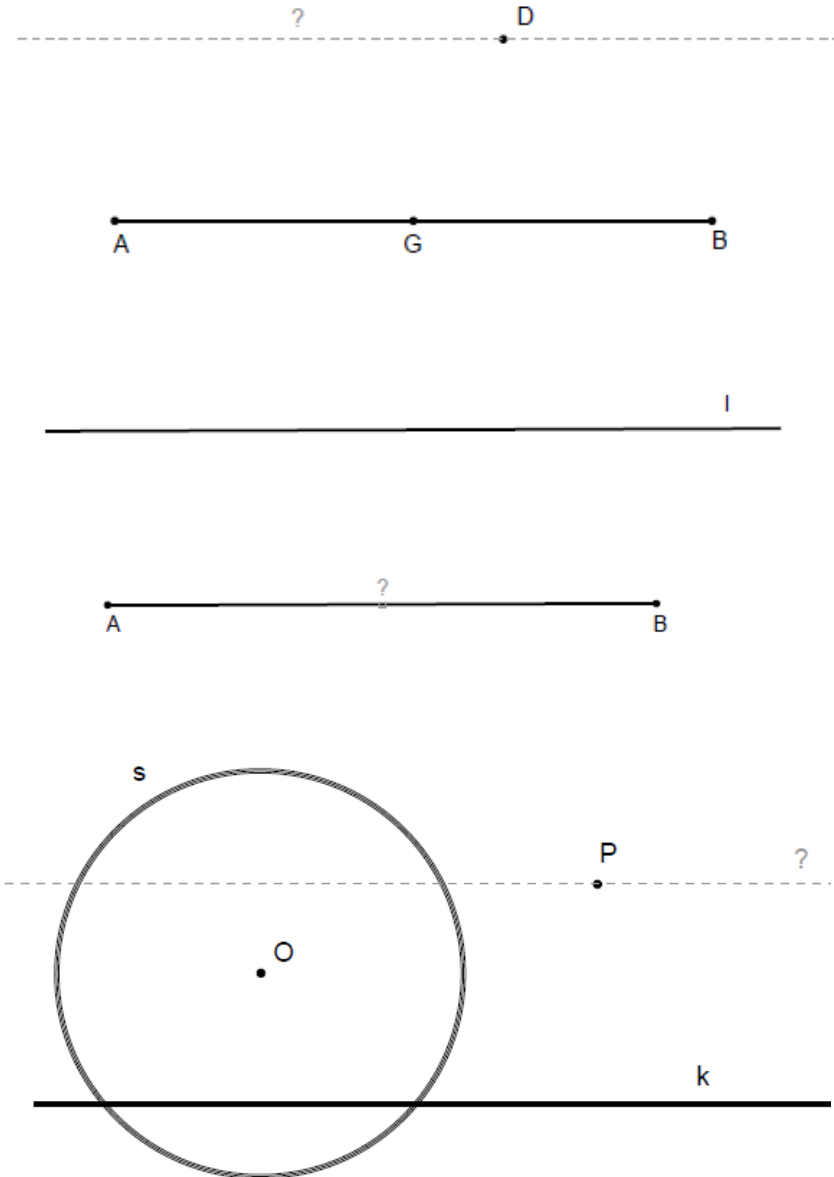


KONSTRUKCJA ZA POMOCĄ JEDYNYE LINIJKI

Zadania na ćwiczeniach

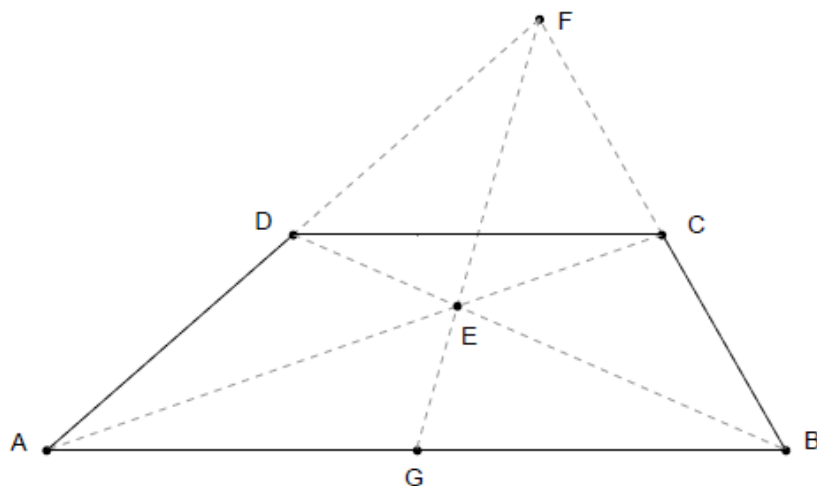
ZADANIA

1. Dany jest odcinek AB oraz punkt G będący jego środkiem. Przez zadany punkt D (nie leżący na prostej AB), posługując się jedynie linijką, poprowadzić prostą równoległą do tego odcinka
2. Dany jest odcinek AB oraz równoległa do niego prosta l (inna niż prosta AB). Posługując się jedynie linijką znaleźć środek odcinka AB .
3. Dany jest okrąg o środku O . Posługując się jedynie linijką znaleźć prostą przechodzącą przez dany punkt P , która będzie równoległa do zadanej (nie przechodzącej przez punkt P) prostej k .



IDEA NA ROZWIĄZANIE

Własność Steinera trapezu



Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E .

Niech F będzie punktem wspólnym prostych AD i CB , a prosta EF niech wyznacza na odcinku AB punkt G .

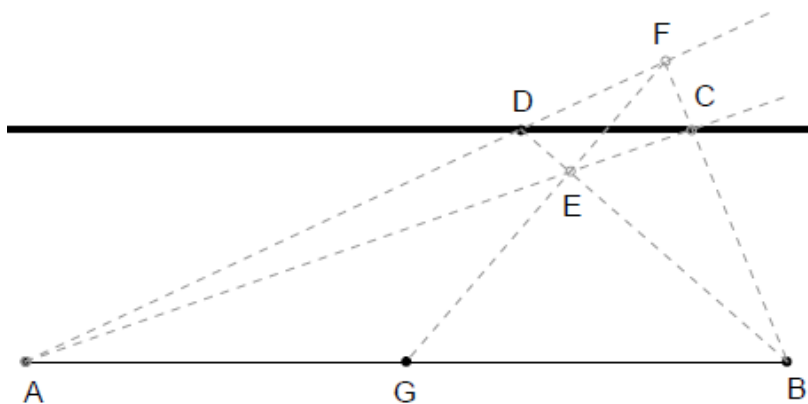
Wtedy:

odcinek AB jest równoległy do odcinka CD wtedy i tylko wtedy, gdy punkt G jest środkiem odcinka AB .

IDEA NA ROZWIĄZANIE

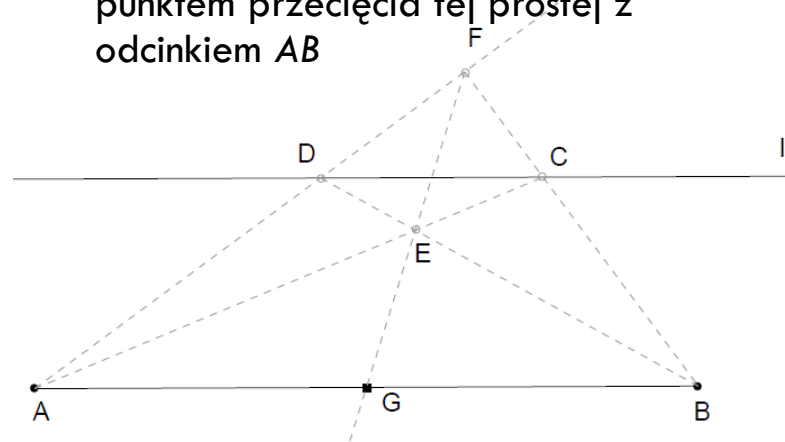
Zadanie 1:

1. prowadzimy prostą AD
2. wybieramy na tej prostej punkt F tak, aby punkt D należał do odcinka AF
3. prowadzimy proste FG i BD , niech E będzie punktem przecięcia tych prostych
4. prowadzimy proste FB i AE , niech C będzie punktem przecięcia tych prostych
5. prowadzimy prostą CD



Zadanie 2:

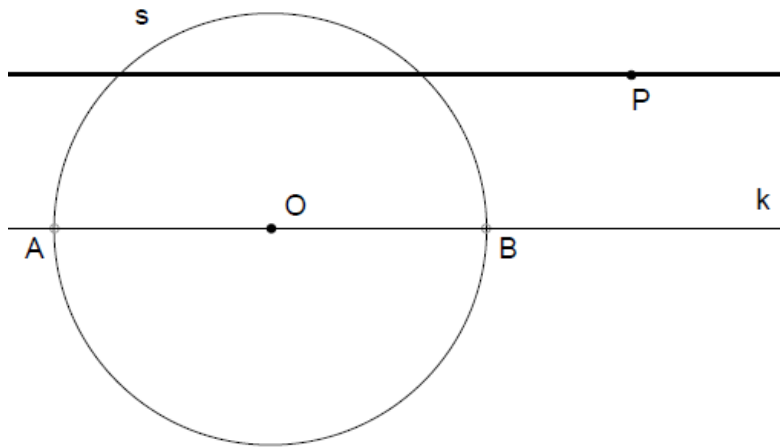
1. wybieramy na prostej l punkt D
2. prowadzimy prostą AD
3. wybieramy na tej prostej punkt F , tak by punkt D należał do odcinka AF
4. prowadzimy prostą $l(BF)$, niech C będzie punktem przecięcia tej prostej z prostą l
5. prowadzimy proste AC i BD , niech E będzie punktem przecięcia tych prostych
6. prowadzimy prostą FE , niech G będzie punktem przecięcia tej prostej z odcinkiem AB



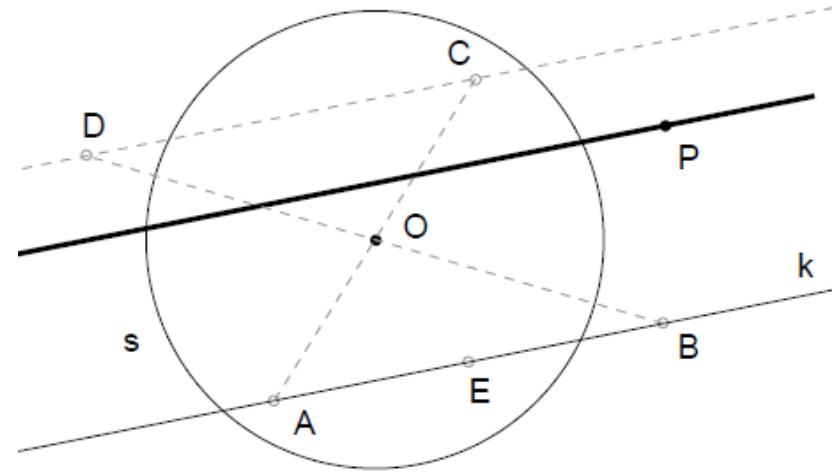
ZAD. 3: PROSTA RÓWNOLEGLA DO DANEJ

Rozpatrujemy 2 przypadki

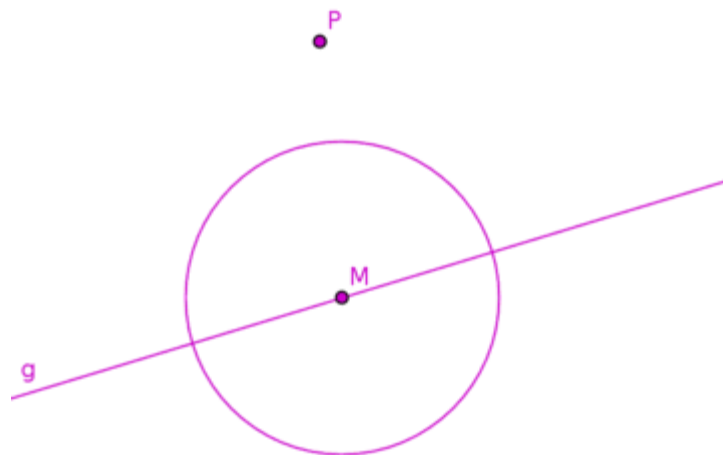
#1: k przechodzi przez O



#2: k nie przechodzi przez O

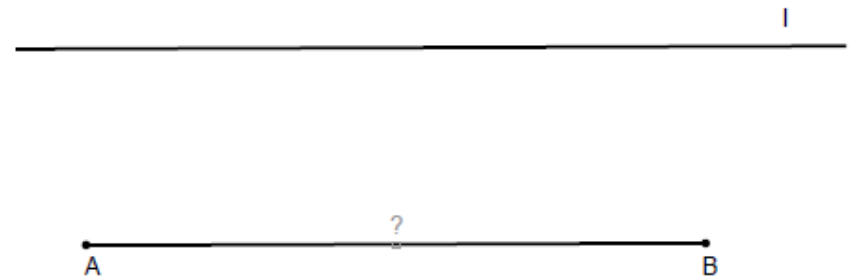


ILUSTRACJA ROZWIĄZANIA



PODZIAŁ ODCINKA NA RÓWNE ODCINKI

Dany jest odcinek AB oraz równoległa do niego prosta l (inna niż prosta AB). Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą



- 1. Postępując się jedynie linijką skonstruuj odcinek o długości n razy dłuższej niż długości AB .*
- 2. Postępując się jedynie linijką znaleźć punkty, które dzielą odcinek AB na n równych odcinków.*

ROZWIĄZANIE

