Zadania domowe — grupa L4

Kuba Pawlikowski

Przypomnienie — metryka d na zbiorze X to funkcja w pewnym sensie mierząca odległość między punktami zbioru X, tzn. spełniająca warunki:

- $d(A, B) = 0 \iff A = B$,
- $d(A, B) = d(B, A)$,
- $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

1. Na prostej $\mathbb{R}$ określamy nową odległość wzorem:

$$d(x, y) = |x - y| + |\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(y)|.$$

Ta funkcja spełnia warunki z definicji metryki, nie musisz tego sprawdzać (chociaż możesz, jeśli wymyślisz szybkie uzasadnienie). Opisz kule $B(0, 1)$, $B(0, 2)$, $B(2, 1)$ i $B(2, 4)$ w sensie tej metryki. Jak wyobrażasz sobie prostą z taką metryką? Uwaga: symbol sgn oznacza znak, tj.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ 1, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

2. Odpowiedz na poniższe pytania i uzasadnij:
   - Czy gdyby w metryce maksimum brać minimum zamiast maksimum, to otrzymalibyśmy metrykę?
   - Czy gdyby w metryce rzeka zawsze iść do rzeki (nawet jeśli oba punkty leżą na jednej prostej pionowej), to otrzymalibyśmy metrykę?
   - Czy gdyby w metryce centrum zawsze iść do dworca/centrum (nawet gdy oba punkty leżą na jednej prostej przechodzącej przez $(0, 0)$), to otrzymalibyśmy metrykę?
3. Niech K będzie kołem (w zwykłej, euklidesowej metryce) na płaszczyźnie o środku $(0, 0)$ i promieniu 1. Określmy na K metrykę wzorem

$$d_S(A, B) = \min\{d_e(A, B), 2 - d_e(A, (0, 0)) - d_e((0, 0), B)\}.$$

Narysuj kule $B\left(\left(0, \frac{3}{4}\right), \frac{1}{2}\right)$ i $B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{4}\right)$.

4. (dodatkowe, nie na punkty) Zrobić trąbkę Borsuka (ang. dunce hat).