Zadania
cz. III. Jak skategoryzować?

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

17 marzec 2016

Zadania zaczerpnięto z:

- „Wstęp do teorii mnogości i topologii”, K. Kuratowski
- Zadania z Topologii I, MIM UW
- „Topologia ogólna” R. Engelking

1 Łatwe

W zadaniach 1–3 sprawdź, że podane wzory zadają dobrze zdefiniowane metryki na płaszczyźnie. *Wskazówka: Przypominamy, że aby metryka była poprawnie określona, musi spełniać trzy warunki: po pierwsze, zerowa odległość oznacza, że jesteśmy w tym samym punkcie ($d(A,B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$); po drugie, jest symetryczna ($d(A,B) = d(B,A)$); po trzecie, spełnia nieróność trójkąta (czyli dla każdych trzech punktów A, B, C zachodzi $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$). W zadaniach chodzi więc o sprawdzenie tych trzech warunków.*

1. Czy metryka maksimum: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$ jest faktycznie metryką?
2. Czy metryka dyskretna: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \\ 1 & \text{wpp.} \end{cases}$ jest faktycznie metryką?
3. Czy metryka rzeki: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{dla } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{wpp.} \end{cases}$ jest faktycznie metryką?
4. Kołem o promieniu r o środku w punkcie (x,y) w metryce d nazywamy zbiór punktów odległych w tej metryce od punktu (x,y) o co najwyżej r. Narysuj na płaszczyźnie koła o promieniu $\frac{1}{4}$ i o promieniu 4 w następujących metrykach:
   - euklidesowej,
   - miejskiej,
   - maksimum.

5. Narysuj koła z poprzedniego zadania w metrykach:
   - dyskretnej,
   - rzeki.
6. Supremum „z czegoś" to najmniejsza liczba rzeczywista większa lub równa wszystkim liczbom „czegoś". Średnicą zbioru A w danej metryce d nazywamy supremum z wartości odległości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami zbioru A (i oznaczamy $d(A)$). Jaka jest średnica, w zwykłej metryce euklidesowej na płaszczyźnie:
   - koła o promieniu 1?
   - kwadratu o boku 1?
   - okręgu o promieniu 1?
   - odcinka $[0,1]$?
   - odcinka $(0,1)$?
   - zbioru $\{(x,y) : (x = 0 \wedge 0 < y < 1) \vee (0 < x < 1 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge 1 < y < 2) \vee (1 < x < 2 \wedge y = 2)\}$?
   - pierwszej ćwiartki $\{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$?
   - osi (OX)?
7. Czy można uprościć definicję średnicy, podaną w poprzednim zadaniu, w następujący sposób: „średnica to największa możliwa odległość pomiędzy dwoma punktami zbioru"? Kiedy taka definicja byłaby poprawna?
   Wskazówka: Rozważ przypadki z poprzedniego zadania.
8. Weźmy zbiór, który jest prostokątem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$, $(0,4)$ — (oczywiście w zwykłym kartezjańskim układzie współrzędnych). Jaka jest średnica tego zbioru w metryce:
   - euklidesowej?
   - miejskiej?
9. Znajdź średnicę tego samego zbioru w metrykach:
   - maksimum,
   - dyskretnej,
   - rzeki.
10. Podaj wnętrza i domknięcia na płaszczyźnie zbiorów z poprzednich zadań.
11. Sprawdź, że zbiór $(0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ jest zbiorem otwartym.
    Wskazówka: Trzeba sprawdzić, że jest on sumą otwartych odcinków.
12. Sprawdź, że zbiór $\{1\}$ jest zbiorem domkniętym (na prostej).
    Wskazówka: Trzeba sprawdzić, że $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *jest sumą otwartych odcinków.*
13. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który nie jest ani otwarty ani domknięty. Uzasadnij!
14. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który jest jednocześnie otwarty i domknięty. Uzasadnij!

15. Oblicz $\text{int}\mathbb{Q}$.
Wskazówka: Zauważ, że w każdym niepustym otwartym odcinku jest jakaś liczba niewymierna. Czy zatem jakiś niepusty zbiór otwarty może „zmieścić się" w $\mathbb{Q}$?

16. Oblicz $\text{cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

2 Trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Poznaliśmy w zadaniach łatwych metryki: euklidesową, miejską, maksimum, dyskretną i rzeki. Zaproponuj swoją, inną, ciekawą metrykę na płaszczyźnie. Sprawdź, czy na pewno jest to metryka. Narysuj w niej powyżej wymienione koła i policz średnice wyżej zdefiniowanego prostokąta (patrz zadania łatwe).

2. Oblicz $\text{cl}\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

3. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{N}$ jest domknięty.

4. Sprawdź, że zbiór Cantora jest domknięty.
Wskazówka: Załóżmy, że jakiś zbiór otwarty zawiera punkt 0. *Czy może do niego nie należeć żadna liczba postaci* $\frac{1}{n}$*?*

5. Czy prosta jest zbiorem otwartym? domkniętym? Rozważ dwa przypadki:
   - jeśli rozmawiamy o topologii na prostej,
   - w topologii na płaszczyźnie.

6. Sprawdź, czy dla każdych dwóch zbiorów zachodzą następujące fakty. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie, podaj kontrprzykład.
   - jeśli $A \subseteq B$, to $\text{cl}A \subseteq \text{cl}B$.
     Wskazówka: Z definicji domknięcie zbioru A to najmniejszy zbiór domknięty, który zawiera A. Skorzystać z tej definicji zauważając, że $A \subseteq B \subseteq clB$.
   - $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \text{cl}(A \cap B)$.
     Wskazówka: Nie. Zbiór po prawej może okazać się zdecydowanie mniejszy. Znajdź przykład dwóch rozłącznych zbiorów, których domknięcia nie są rozłączne.

7. Sprawdź, czy dla każdych dwóch zbiorów zachodzą następujące fakty. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie, podaj kontrprzykład.
   - $\text{cl}A \cup \text{cl}B = \text{cl}(A \cup B)$.
     Wskazówka: To prawda. Zauważ, że $clA \subseteq cl(A \cup B)$ i symetrycznie $clA \subseteq cl(A \cup B)$. Zauważ także, że ponieważ suma dwóch zbiorów domkniętych jest domknięta, to $clA \cup clB \supseteq cl(A \cup B)$.
   - $\text{cl}A \setminus \text{cl}B = \text{cl}(A \setminus B)$.

8. Sprawdź, czy dla każdych dwóch zbiorów zachodzą następujące fakty. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie, podaj kontrprzykład.
   - jeśli $A \subseteq B$, to $\text{int}A \subseteq \text{int}B$.
   - jeśli G jest zbiorem otwartym, to $\text{cl}G = \text{cl}(\text{int}(\text{cl}G))$.

9. Udowodnij, że jeśli $A \subseteq B$, to $d(A) \leq d(B)$ (definicja średnicy zbioru jest wyżej).
10. Czy dla każdych dwóch zbiorów $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$? Odpowiedź uzasadnij.
    Wskazówka: Co jeśli A i B są „daleko” od siebie?
11. Wykaż, że zbiór liczb niewymiernych nie jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych.
    Wskazówka: Skorzystaj z Tw. Baire'a.
12. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem przeliczalnym. Udowodnić, że istnieje punkt $r \in \mathbb{R}$, taki że dla każdego $a \in A$, $|r - a| \notin \mathbb{Q}$.
    Wskazówka: Zauważ, że zbiór punktów $r \in \mathbb{R}$ takich, że dla każdego $a \in A$ mamy $|r - a| \notin \mathbb{Q}$, jest zbiorem wątłym.
13. Zbiór U taki, że $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}U)$ nazywamy regularnie otwartym. Wykaż, że iloczyn dwóch zbiorów regularnie otwartych jest regularnie otwarty. Sprawdź, że nie musi być to prawdą w przypadku sumy.
14. Niech U i V będą regularnie otwarte (patrz poprzednie zadanie). Wykaż, że $U \subseteq V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}U \subseteq \mathrm{cl}V$.

3 Trudniejsze

1. Udowodnij, że przy pomocy operacji $\mathrm{int}A$ i $\mathrm{cl}A$ możemy wygenerować maksymalnie siedem różnych zbiorów.
   Wskazówka: Udowodnij najpierw, że: $cl(\mathbb{R} \setminus (cl(\mathbb{R} \setminus (cl(\mathbb{R} \setminus (clA)))))) = cl(\mathbb{R} \setminus (clA))$.
2. Niech $K \subseteq \mathbb{R}$ będzie podzbiorem domkniętym o pustym wnętrzu. Udowodnij, że istnieje $a \in \mathbb{R}$, takie że przesunięcie zbioru K w prawo o a jest zawarte w zbiorze liczb niewymiernych.
   Wskazówka: Suma przesunięć zbioru K o dowolne liczby wymierne jest zbiorem wątłym.