

Pracownia nr 2

6.11.2010

1 Zadanie: obliczanie całki za pomocą kwadratur

Na pierwszej pracowni komputerowej poznaliśmy metodę na przybliżanie wartości całki oznaczonej - tzn. całki z funkcji f na zadanym przedziale $[a, b]$ - poprzez wypełnianie figury "pod wykresem" funkcji f , na przedziale $[a, b]$ prostokątami. Wartość całki - pola "pod wykresem" - przybliży wtedy suma pól prostokątów. Metoda ta nazywana jest *kwadraturą*.

1.1 Zadanie 1

1. Zdefiniuj funkcję f jako $f = 2\sqrt{1-x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$.
2. Skonstruuj kwadraturę prostokątów - przedział $[a, b]$ podziel na równe odcinki i za wierzchołek prostokąta przyjmij wartość funkcji f na końcu odcinka.
3. Skonstruuj kwadraturę trapezów - przedział $[a, b]$ podziel na równe odcinki i za wierzchołki trapezu przyjmij wartość funkcji f w końcach odcinka.
4. Dla każdej z metod (kwadratur) sprawdź błąd przybliżenia zwiększając liczbę odcinków na które podzielony jest przedział $[a, b]$:
 - (a) Niech n oznacza liczbę odcinków podziału $n = 2, 3, 4, \dots$
 - (b) Jak obliczyć wartość kwadratury prostokątów dla kolejnych n ?
 - (c) Jak obliczyć wartość kwadratury trapezów dla kolejnych n ?
 - (d) Oblicz dokładną wartość całki z funkcji f na przedziale a, b
 - (e) Utwórz funkcję błędu przybliżenia - wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy dokładną wartością całki a uzyskanymi wartościami kwadratury - zależną od n
 - (f) Niech $b1(n)$ oznacza funkcję błędu dla kwadratury prostokątów, a $b2(n)$ dla kwadratury trapezów
 - (g) Utwórz listę nn zawierającą $n = 2, 3, 4, \dots$
 - (h) Utwórz listę bp zawierającą wartości $b1(n)$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$
 - (i) Utwórz listę bt zawierającą wartości $b2(n)$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$
5. Narysuj wykres obrazujący zależność błędu od liczby odcinków podziału dla obydwu kwadratur

1.2 Zadanie 2

Niech teraz $g = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na przedziale $[-1, 1]$. Jak dobrze wybrana kwadratura przybliży wartość całki z funkcji g na przedziale $[-1, 1]$? Narysuj wykres błędów przybliżenia dla różnych podziałów przedziału $[-1, 1]$.

1.3 Zadanie 3

Rozważmy funkcję $f = \frac{1}{x}$ na przedziale $[0, 1]$. Spróbuj obliczyć wartość przybliżoną całki z funkcji f na wskazanym przedziale. Co się dzieje, jaką wartość oblicza **Maxima**? Wyjaśnij to z prowadzącym.

2 Wskazówki

- Definiowanie zmiennych:

```
a : -1
```

- Definiowanie funkcji:

```
f(x) := x^2 + 1
```

- Tworzenie list:

```
aa : makelist(a + i, i, 1, 10)
```

- Obliczanie sumy ciągu:

```
sum(a + i, i, 1, 10)
```

- Obliczenie całki oznaczonej z funkcji **f** na przedziale **a,b**:

```
integrate(f(x), x, a, b)
```

- Wyznacz wartość numeryczną wyrażenia **xyz**:

```
xyz, numer
```

- Rysowanie wykresu funkcji **f** na przedziale **a,b**:

```
plot2d(f(x), [x, a, b])
```

- Rysowanie wykresu złożonego z punktów, których współrzędne zapisane są w listach **aa** i **bb**:

```
plot2d([discrete, aa, bb])
```

- Rysowanie dwóch wykresów złożonych z punktów, których współrzędne zapisane są odpowiednio w listach **aa**, **bb** oraz **aa**, **cc**, na jednym rysunku:

```
plot2d([ [discrete, aa, bb], [discrete, aa, cc] ])
```

- Rysowanie dwóch wykresów: jednego złożonego z punktów o współrzędnych zapisanych w listach **aa** i **bb**, drugiego funkcji **f** na przedziale **a,b**, na jednym rysunku:

```
plot2d([ [discrete, aa, bb], f(x)], [x, a, b])
```