Grafy.
1. i 2. Jak zliczyć?
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch, zadania pochodzą z różnych źródeł

1 marca 2021

1 Zliczanie na rozgrzewkę

Zadanie 1

Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest równa 1 lub 2, a cyfra jedności jest większa niż 5? Narysuj drzewo, którego gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby. A ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest równa 1, 2 lub 3, cyfra dziesiątek jest podzielna przez 5, a cyfra jedności jest większa niż 6? Narysuj drzewo, którego gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

Zadanie 2

Pan Marek ma 3 marynarki, 4 krawaty i 5 koszul. Na ile różnych sposobów może skompletować strój do pracy?

Zadanie 3

Ile jest różnych punktów (x, y) płaszczyzny o współrzędnych całkowitych takich, że $4 \leq x \leq 20$ i $0 < y \leq 100$?

Zadanie 4

Rzucamy dwiema różnymi monetami, a następnie trzema różnymi sześciennymi kostkami do gry. Ile różnych wyników tego doświadczenia możemy uzyskać?

Zadanie 5

W biegu startuje ośmiu biegaczy - czterej Jamajczycy, trzej Anglicy i Grek. Bieg ma się rozgrywać na bieżni złożonej z ośmiu numerowanych torów. Przed biegiem dla zawodników losowane są tory, po których będą biegli. W tym zadaniu liczymy tylko rozkład torów pomiędzy narodowości – biegacze danej narodowości będą dla nas nierozróżnialni.

a) Ile jest wszystkich możliwych wyników losowania torów?

b) Ile jest takich możliwych wyników, w których Grek na pewno startuje z toru pierwszego?

c) Ile jest takich możliwych wyników, w których Grek na pewno startuje z toru piątego?

d) Ile jest takich możliwych wyników, w których Jamajczycy na pewno startują z torów 1-4?

e) Ile jest takich możliwych wyników, w których żadnych dwóch zawodników z Europy nie będzie biegło na sąsiednich torach?

f) Ile jest takich możliwych wyników, w których żadnych dwóch zawodników z Europy nie będzie biegło na sąsiednich torach i żadnych dwóch zawodników z Jamajki nie będzie biegło na sąsiednich torach?

2 Permutacje, kombinacje i wariacje

Na rozgrzewkę zacznijmy od silni, czyli $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots, \cdot n$.

Zadanie 6

Ile wynosi:

a) 5!,

b) 7!.

Permutacje to liczenie liczby możliwych ustawień kolejności jakiegoś zbioru elementów. Elementy zbioru n-elementowego można ustawić w n-elementowe ciągi elementów (bez powtórzeń) na $n!$ sposobów, gdzie $n! = 1 \cdot \ldots n$.

Wariacje bez powtórzeń to nieco bardziej ogólne zadanie. Ze zbioru n-elementowego wybieramy k-elementowe ciągi (bez powtórzeń). Można to zrobić na:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

sposobów.

Wariacje z powtórzeniami to wybór ze zbioru n-elementowego k-elementowego ciągu, w którym elementy mogą się powtarzać. Można więc to zrobić na

$$W_n^k = n^k$$

sposobów.

Kombinacje bez powtórzeń to wybór ze zbioru n-elementowego k-elementowego podzbioru (a więc bez powtórzeń i nie liczy się kolejność elementów). Łatwo zauważyć, że

$$C_n^k \cdot k! = V_n^k,$$

gdzie C_n^k to liczba kombinacji bez powtórzeń. A zatem

$$C_n^k = \frac{v_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

To ostatnie oznaczenie jest nazywane symbolem Newtona.

W końcu **kombinacje z powtórzeniami** to zadanie wyboru ze zbioru n-elementowego kolekcji k-elementowej, w której jednak elementy mogą mieć krotności (ale nie liczy się kolejność). Jest to równoważne zadaniu polegającym umieszczeniu k elementów w n pudłach. Doszliśmy do wniosku, że można to zrobić na

$$K_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$$

sposobów.

Podsumowując mamy, co następuje

	wariacje (kolejność)	kombinacje (bez kolejności)
bez powtórzeń	$V_n^k = n!/(n-k)!$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
z powtórzeniami	$W_n^k = n^k$	$K_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$

Zadanie 7

Ile wynosi:

a) $\binom{8}{3}$,

b) $\binom{2021}{0}$,

c) $\binom{2021}{1}$,

d) $\binom{9}{5}$,

e) $\binom{2021}{2021}$.

Zadanie 8

Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Ile różnych pięcio-literowych słów (też bez sensu) można utworzyć z liter wyrażenia AGRESYWNA MAŁPA,

a) jeśli każdej litery możemy użyć wielokrotnie?

b) jeśli każde stworzone słowo musi się składać z różnych liter?

Zadanie 9

Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Z każdego słowa, o którym mowa w poprzednim zadaniu w podpunkcie a) tworzymy statystykę o tym ile i jakich liter w nim występuje.

a) Ile różnych statystyk możemy dostać?

b) A ile możemy dostać statystyk, jeśli każde stworzone słowo musiało się składać z różnych liter?

Zadanie 10

Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz.

a) Pięć nierozróżnialnych małp siedzi na 8-miu kolejnych drzewach. Ile takich sytuacji istnieje?

b) a ile sytuacji zaobserwuje wytrawny biolog, który będzie potrafił rozróżnić wszystkie małpy?

Zadanie 11

Mamy do wysłania (w sumie) dwanaście identycznych listów, i musimy je wysłać do czterech osób. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można to zrobić przy założeniu, że każda osoba otrzyma co najmniej dwa listy?

Zadanie 12

Ile liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99999\}$ ma taką własność, że suma ich cyfr wynosi 7?
Wskazówka: Mamy siedem jedności i musimy te jedności rozdzielić w dowolny sposób na 5 *możliwych pozycji cyfr w liczbie.*

3 Trójkąt Paskala

Opowiadając bajkę o stadzie n małp wybierającą k-osobową ekipę do poszukiwania nowego żerowiska, udowodniliśmy, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Rzeczywiście, samiec alfa może albo po prostu wybrać k małp ze swojego stada, albo zdecydować najpierw, czy pójdzie on, i w zależności od tego albo wybrać $k-1$ z pozostałych $n-1$ małp, albo k z pozostałych $n-1$ małp.

Zadanie 13

Udowodnijcie ten fakt, czyli że dla każdego n, k, $k \le n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

ale korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona.

Z tego faktu oraz z tego, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

wynika, że symbole Newtowna $\binom{n}{k}$ można przedstawić w poniższym trójkącie, zwanym trójkątem Pascala, w którym każdy element jest sumą elementów nad nim i nad nim na lewo.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Przy okazji patrząc na ten trójkąt udowodniliśmy, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Można to też udowodnić inaczej:

Zadanie 14

Udowodnijcie, zastanawiając się nad kombinatorycznymi aspektami, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Wróćmy jednak do opowiadania historyjek i znajdźmy taką, która jest rozwiązaniem następującego zadania.

Zadanie 15

Udowodnijcie, że dla każdych k, r, $k \leq r$, zachodzi

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Czasem do notowania długich sum będzie nam się przydawać notacja sumy z użyciem znaku Σ. Pod znakiem piszemy nazwę zmiennej, a po równości jej pierwszą wartość, a nad znakiem jej końcową wartość i sumujemy wszystkie wyrażenia za znakiem Σ dla kolejnych wartości zmiennej. Na przykład,

$$\sum_{i=3}^{5}(i^2+2) = (3^2+2) + (4^2+2) + (5^2+2) = 11 + 18 + 27.$$

Zadanie 16

Oblicz

a) $\sum_{i=5}^{10} i$,

b) $\sum_{i=0}^{4}(i^2+i)$.

Zadanie 17

Oblicz

$$\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Wskazówka: Zapisz $\frac{1}{k(k+1)}$ *w postaci* $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$.

Wróćmy zatem do historyjek.

Zadanie 18

Udowodnijcie, nic nie licząc, że

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot 2^{n-1}.$$

4 Wzór dwumianowy Newtona

Zacznijmy od prostego zadania na rozgrzewkę.

Zadanie 19

Rozwiń

a) $(a+b)^3$

b) $(a+b)^4$

oraz porównaj wyniki z liczbami z trójkąta Pascala. Czy jesteś w stanie na tej podstawie sformułować swoje przewidywania na temat kolejnych potęg? Sformułowałaś/eś prawdopodobnie wzór dwumianowy Newtona!

Jeśli chcemy rozpisać wyrażenie postaci $(a+b)^n = (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$ to pojawi się suma iloczynów postaci $a^k b^{n-k}$. Zauważ, że współczynnik, który przy takim wyrażeniu wystąpi to liczba sposobów wyboru z n nawiasów $(a+b)$ k nawiasów, w których do wymnożenia weźmiemy a. Zatem te współczynniki to kolejne wyrazy w wierszu trójkąta Pascala (co można było zaobserwować w powyższym zadaniu) i

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n b^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n-2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ten wzór nosi nazwę dwumianowego wzoru Newtona.

Zadanie 20

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona oblicz

a) $(3a+1)^5$

b) 11^4

Zadanie 21

Udowodnijcie, że dla każdego n,

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = 0.$$

Wskazówka: Zastosuj wzór dwumianowy Newtona.

5 Zasada szufladkowa Dirichleta

Bardzo prosty fakt kombinatoryczny, a jednak o niesamowitej liczbie zastosowań w dowodach wcale niebanalnych matematycznych faktów sformułowaliśmy następująco: jeśli n małp śpi na k drzewach, oraz $k < n$ to na co najmniej jednym drzewie śpią co najmniej dwie małpy.

Zadanie 22

Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, udowodnijcie, że wśród trzech licz całkowitych zawsze są dwie, który suma jest liczbą parzystą.

Zadanie 23

Niech p będzie liczbą naturalną, a $a_1, \ldots, a_p$ dowolnym ciągiem p liczb całkowitych. Udowodnijcie, że suma pewnych z liczb $a_1, \ldots, a_p$ jest wielokrotnością liczby p.
Wskazówka: Zastosuj zasadę szufladkową Dirichleta. Rozważ reszty z dzielenia przez p liczb ze zbioru:

$$\{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_p\}.$$

Zadanie 24

Niech $A = \{1, \ldots, 50\}$. Udowodnijcie, że istnieją dwa różne pięcio-elementowe podzbiory A o takiej samej sumie elementów.

Zadanie 25

Niech A będzie pewnym dziesięcio-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, 50\}$. Udowodnijcie, że istnieją dwa różne pięcio-elementowe podzbiory A o takiej samej sumie elementów.
Wskazówka: Porównaj liczbę możliwych pięcioelementowych podzbiorów oraz liczbę możliwych sum ich elementów i skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

Rozważmy teraz skończone ciągi różnych liczb rzeczywistych. Np. weźmy ciąg długości $2 \cdot 3 + 1 = 7$, np.

$$1, \frac{5}{2}, 2021, \sqrt{2}, \pi, 2020, -2$$

wtedy

$$1, \sqrt{2}, \pi, 2020$$

jest jego podciągiem rosnącym długości $3 + 1 = 4$. Jeśli wezmę ciąg:

$$1, \frac{5}{2}, 2021, 2020, \pi, -10, -2$$

to mogę znaleźć w nim ciąg malejący długości $2 + 1 = 3$, np.:

$$2021, 2020, \pi.$$

Okazuje się, że jest tak zawsze, w następującym sensie.

Zadanie 26

Udowodnijcie następujące twierdzenie zauważone przez Erdösa. Niech n, m będą dowolnymi liczbami naturalnymi ≥ 1. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{nm+1}$ będzie dowolnym ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Udowodnijcie, że wtedy istnieje w nim podciąg rosnący

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{m+1}}$$

długości $m + 1$ lub podciąg malejący

$$a_{j_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{j_{n+1}}$$

długości $n + 1$.
Wskazówka: Przypisz kolejnym wyrazom ciągu długość najdłuższego podciągu rosnącego zaczynającego się od tego elementu.

6 Ciąg Fibonacciego

Na wykładzie poznaliście ciąg Fibonacciego, czyli ciąg $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, w którym każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich.

Zadanie 27

Stwórz podobny wzór rekurencyjny pasujący do ciągu:

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots.$$

Wymyśl zjawisko lub proces w świecie rzeczywistym, w której rolę odgrywa ten ciąg.

Zadanie 28

Policzcie kolejne ilorazy kolejnych liczb z (oryginalnego) ciągu Fibonacciego, czyli (używając kalkulatora) podzielcie drugą liczbę przez pierwszą, trzecią przez drugą, czwartą przez trzecią i tak dalej. Co obserwujecie?

Zadanie 29

Ten ciąg ilorazów jest coraz bliższy do tak zwanej złotej proporcji, która wynosi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Policzcie na kalkulatorze powyższą liczbę i sprawdźcie, że rzeczywiście wyrazy ciągu ilorazów są do niej coraz bliższe.

Zadanie 30

Liczba φ jest nazywana czasem „najprostszą niewymierną liczbą" lub „najbardziej niewymierną liczbą". Liczby niewymierne to takie liczby, których nie da się zapisać w postaci p/q, gdzie obie liczby p, q są całkowite, przy czym $q \neq 0$. Inne przykłady liczb niewymiernych, poza φ, to chociażby π, czy też $\sqrt{2}$. Liczbami niewymiernymi jeszcze się zajmiemy w przyszłości, ale teraz spróbujcie udowodnić, że φ jest rzeczywiście niewymierna.
Wskazówka: Załóżmy przeciwnie, że są takie liczby całkowite p, q, że $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Przekształćcie to równanie tak, żeby nie mieć w nim pierwiastka. Czyli w takim razie 5 jest ilorazem kwadratów dwóch liczb całkowitych: $a^2 = (2p - q)^2$ oraz q^2. Rozważcie teraz podzielność przez potęgi piątki licznika i mianownika.

Zadanie 31

Wiemy już, że φ jest liczbą niewymierną. Dlaczego jest więc „najbardziej niewymierną"? Otóż każdą liczbę można rozłożyć w ułamek łańcuchowy. Co to ułamek łańcuchowy? Przyjrzyjmy się na przykładzie. Np.:

$$\frac{43}{5} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}},$$

co łatwo sprawdzić, sprowadzając kolejne dodawania do wspólnego mianownika. Tymczasem liczby niewymierne rozpisują się w nieskończone ułamki łańcuchowe, czyli:

$$\square + \cfrac{1}{\square + \cfrac{1}{\square + \cfrac{1}{\square + \frac{1}{\cdots}}}}.$$

Co trzeba wstawić za $\square$, żeby dostać liczbę φ? Najprostsza możliwa liczba jest najlepsza! Właśnie dlatego φ jest „najprostszą niewymierną liczbą" lub „najbardziej niewymierną liczbą". Sprawdź kolejne przybliżenia obcinając ułamek łańcuchowy w którymś miejscu.

7 Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna to bardzo przydatna metoda dowodzenia twierdzeń w jakiś sposób związanych z liczbami naturalnymi.

O co chodzi? O bardzo prosty i bardzo silny model wnioskowania. Jeśli mamy ciąg kilku baterii (ustawionych od lewej do prawej) ustawionych za sobą i wiemy dwie rzeczy:

- pierwsza z nich po lewej ma minus,
- każda kolejna jest ustawiona dobrze, czyli kolejna bateria ma po lewej stronie znak przeciwny do znaku poprzedniej baterii z prawej strony,

to od razu wiemy, że wszystkie baterie w ciągu po lewej stronie mają minus. Oczywiste, nie? Te dwa elementy wiedzy nazywamy pierwszym i drugim krokiem indukcyjnym.

Jak zasadę indukcji sformułować ogólnie? Mamy daną jakąś tezę zależną od liczby n (w przykładzie będzie to: n-ta bateria ma po lewej stronie minus) i chcemy udowodnić, że zachodzi dla każdej liczby naturalnej n. Zasada indukcji mówi, że wystarczy, że pokażemy, że prawdziwe są dwa fakty:

- teza jest prawdziwa dla $n = 0$ (pierwszy krok)
- prawdziwa jest następująca implikacja: jeśli teza jest prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = k + 1$ (krok indukcyjny).

Na przykład, pokażmy, że dla każdej liczby naturalnej n, prawdziwe jest stwierdzenie, że suma kolejnych liczb naturalnych od 0 do n wynosi $\frac{(n+1)n}{2}$

W pierwszym kroku sprawdzamy dla $n = 0$. $0 = 0$, ok.
Drugi krok. Załóżmy, że $1 + \ldots + k = \frac{(k+1)(k)}{2}$. Teza: $1 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. Rzeczywiście korzystając z założenia: $1 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. OK. □

Zadanie 32

Udowodnijcie korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n, 3 jest dzielnikiem liczby $7^n - 1$.

Zadanie 33 (2 punkty)

Udowodnijcie, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ zachodzi $2^n > 2n + 1$

Zadanie 34

Okazuje się, że aby policzyć n-tą liczbę w ciągu Fibonacciego, nie trzeba koniecznie liczyć wszystkich poprzednich. Zaskakujące może się bowiem wydać, że n-ta liczba Fibonacciego to

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Przy okazji zauważmy, że i tu złota proporcja odgrywa istotną rolę! Udowodnijcie ten wzór korzystając z zasady indukcji matematycznej!
Wskazówka: Tutaj w kroku indukcyjnym trzeba będzie założyć, że wzór działa nie tylko dla jednej, ale dla dwóch kolejnych liczb, $k - 1$ i k. Dlatego w pierwszym kroku indukcyjnym też trzeba sprawdzić dwie pierwsze liczby: $n = 0$ i 1.

8 Proponowane zadania domowe

Oddając zadania domowe możesz każdorazowo wysłać dowolny ich zestaw, którego suma punktów jest nie większa niż 6.

Zadanie 35 (1 punkt)

Oblicz:

$$\binom{9}{3}, \binom{2021}{2020}, \binom{7}{5}, \binom{2021}{2019}.$$

Zadanie 36 (1 punkt)

Oblicz

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{4}{i}.$$

Zadanie 37 (1 punkt)

Niech $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Ile jest podzbiorów zbioru A? Ile jest cztero-elementowych podzbiorów zbioru A? Ile jest cztero-elementowych pobzbiorów zbioru A, składających się z trzech liczb nieparzystych i jednej parzystej?

Zadanie 38 (1 punkt)

Udowodnij (opowiadając historię), że dla każdych n, r, $r \leq n$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Sprawdź też powyższy wzór korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona.

Zadanie 39 (1 punkt)

a) Wszystko wskazuje na to, że już starożytni Grecy znali złotą proporcję. Zauważyli także, że proporcje z nią związane wydają się naturalne i przyjemne dla ludzkiego oka. Poniżej rysunek przedstawiający rekonstrukcję Partenonu – słynnej głównej świątyni na ateńskim Akropolu. Posługując się linijką, kalkulatorem i nożyczkami stwórzcie z kartki papieru kilka odpowiednich prostokątnych wzorców oraz znajdźcie możliwie dużo par długości elementów architektonicznych na rysunku Partenonu, które są względem siebie w złotej proporcji.

b) Przez kolejne wieki to właśnie złote proporcje wyznaczały kanon piękna w architekturze. Na kolejnym rysunku znajdziecie fasadę katedry Norte Dame w Paryżu. Które pary odcinków są właśnie w takiej proporcji?

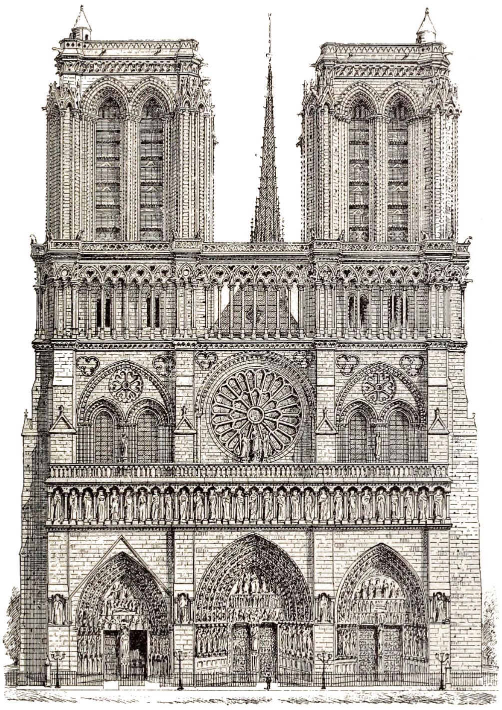

Fig. 29. — Notre-Dame de Paris. Façade principale.

Uwaga: powyższe rysunki znajdziecie też na stronie naszych zajęć w materiałach z ćwiczeń!

Zadanie 40 (1 punkt)

Udowodnij, że nie można umieścić na trójkącie równobocznym o boku 2 pięciu punktów, takich, że dystans między dowolnymi dwoma punktami jest zawsze większy od 1. Skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

Zadanie 41 (2 punkty)

Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba $11^n - 4^n$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 42 (2 punkty)

Udowodnij, opowiadając historię, że dla każdych r, m, k takich, że $m \leq r, k \leq m$, mamy

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

Zadanie 43 (2 punkty)

Na ile sposobów można umieścić 14 kul w 3 pudełkach, ale tak, by w co najmniej jednym z nich było co najmniej 8 kul?

a) Załóż, że kule są nierozróżnialne (są takie same), natomiast pudełka są (np. są ponumerowane).

b) Załóż, że zarówno kule, jak i pudełka są nierozróżnialne.

Zadanie 44 (3 punkty)

Udowodnij nic nie licząc, że dla każdych n, k, $k \le n$, zachodzi:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n-(k-1)} \binom{n-i}{k-1} 2^{i-1}.$$

Wskazówka: Pomyśl o k-tym elemencie wybieranego zbioru.

Zadanie 45 (3 punkty)

Niech f_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Udowodnij, że dla każdego n,

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i},$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza zaokrąglenie liczby x w dół.