Jak modelować epidemię?

XIII edycja Matematyki dla Ciekawych Świata

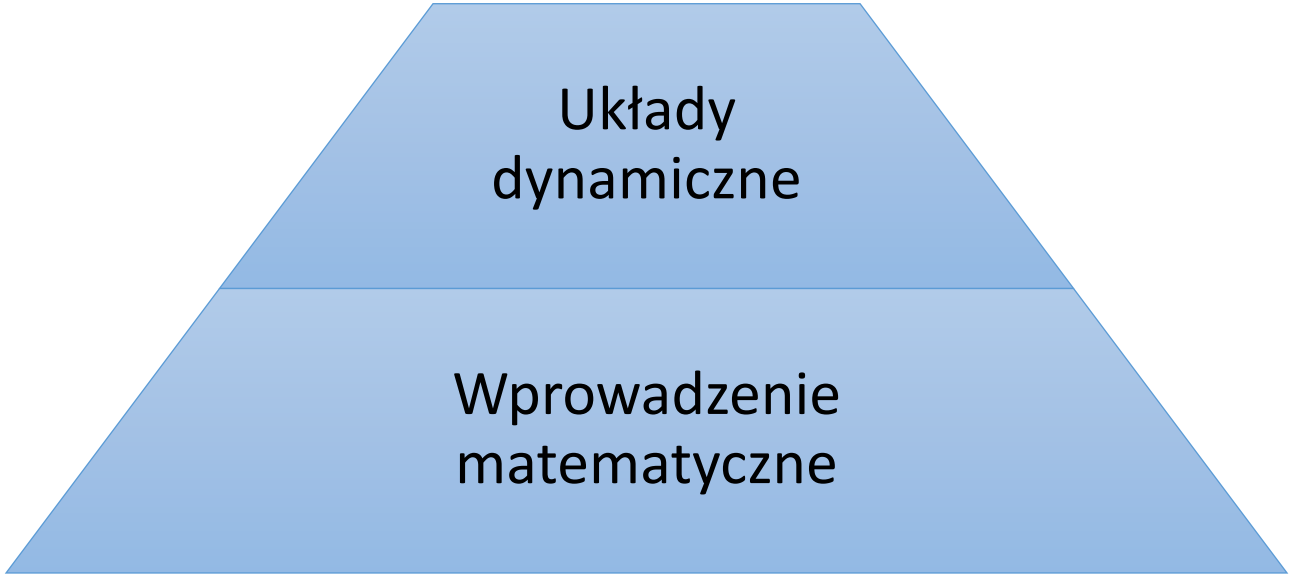
Piotr Morawiecki

Plan cyklu wykładów

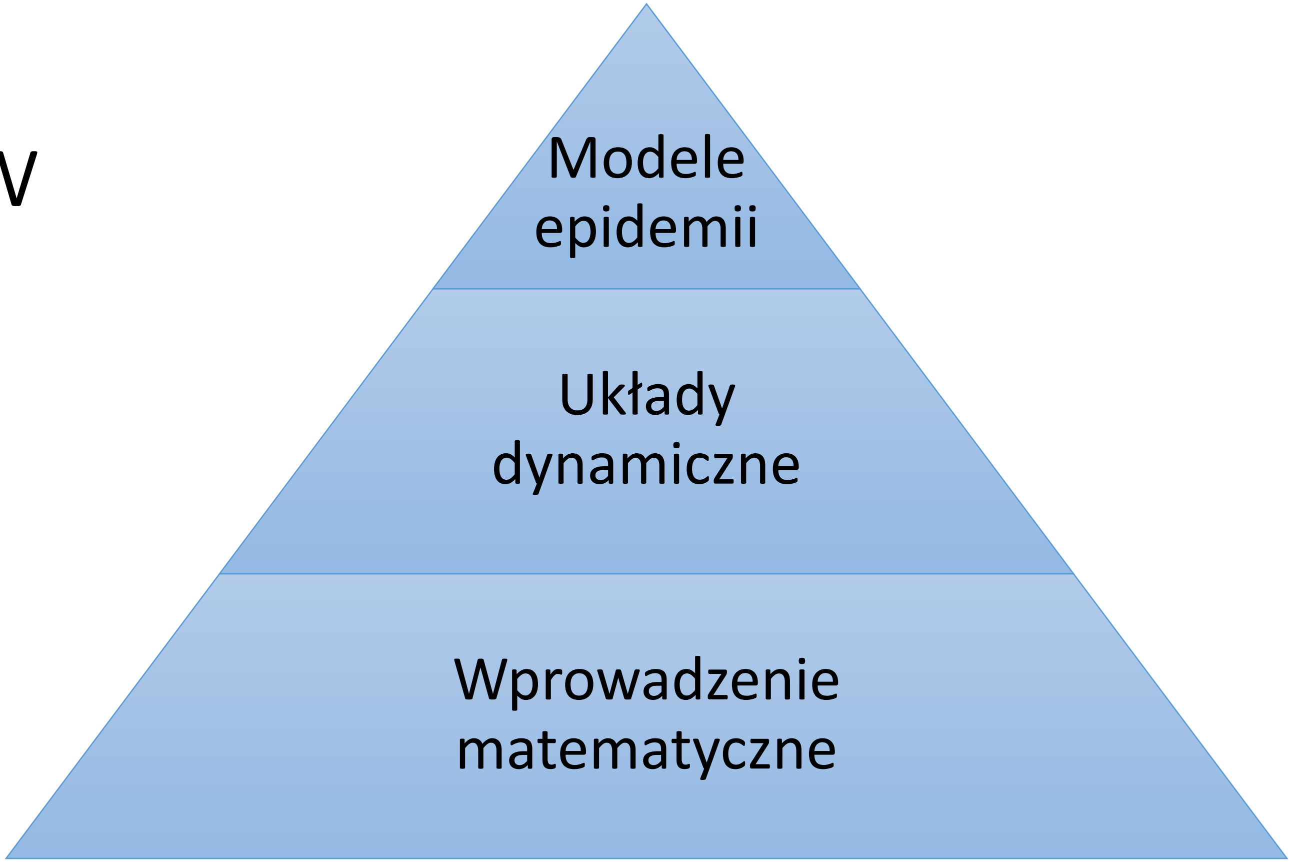
Plan cyklu wykładów

Wprowadzenie
matematyczne

Plan cyklu wykładów



Plan cyklu wykładów



Kilka uwag na początek

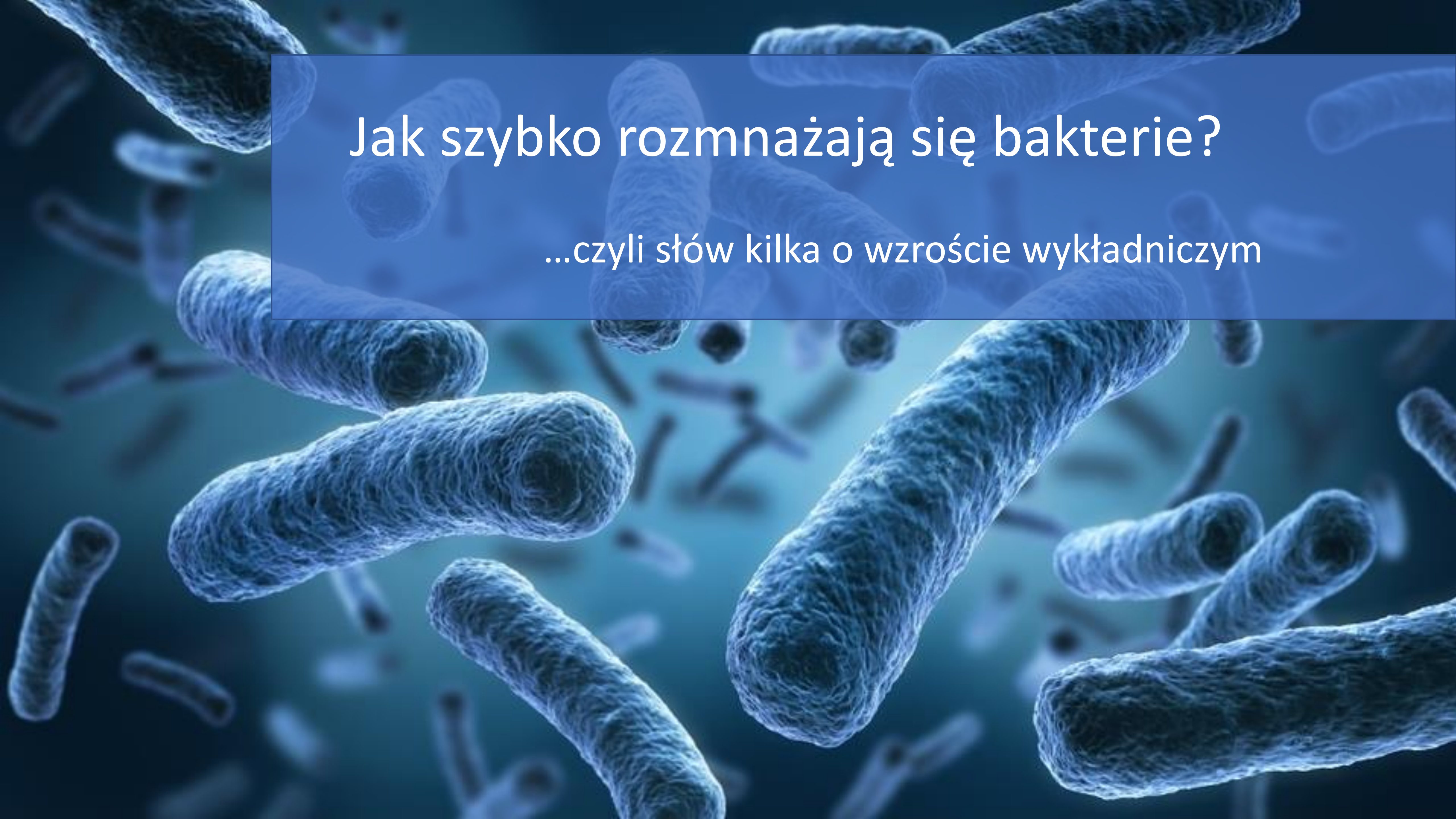
- Wykłady polecam oglądać na żywo
- Będą one również dostępne później na YouTube
- W razie jakichkolwiek pytań podnoście rękę lub korzystajcie z chatu
- Zachowajcie kulturę na chacie
- Możecie się też ze mną kontaktować przez Discorda

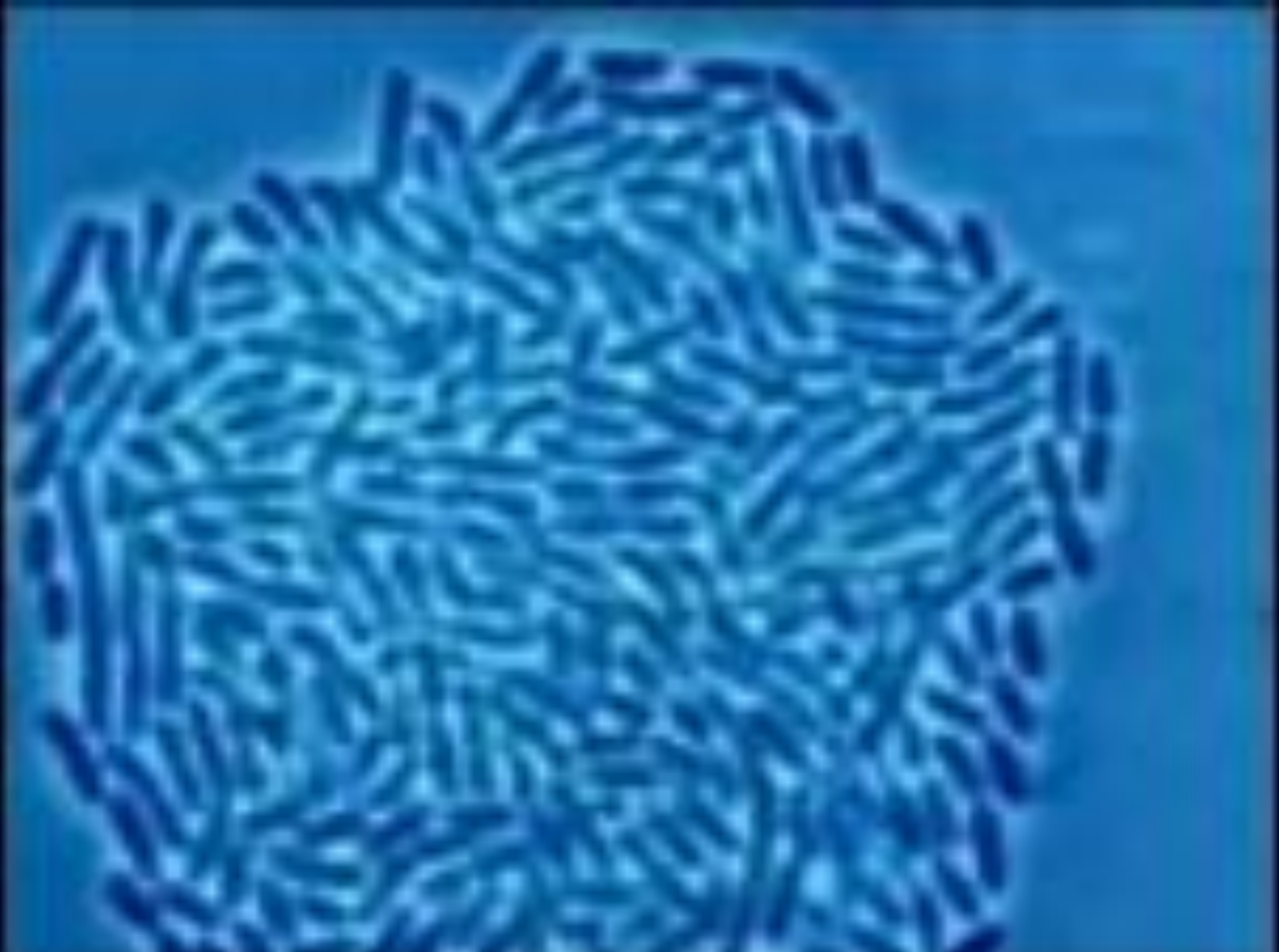
Z czym wam się kojarzy wzrost wykładniczy / lawinowy?

Co mają wspólnego?

Jak szybko rozmnażają się bakterie?

…czyli słów kilka o wzroście wykładniczym





$n(t = 0) = 1$
$= 2^0$

$n(t = 1) = 2$
$= 2^1$

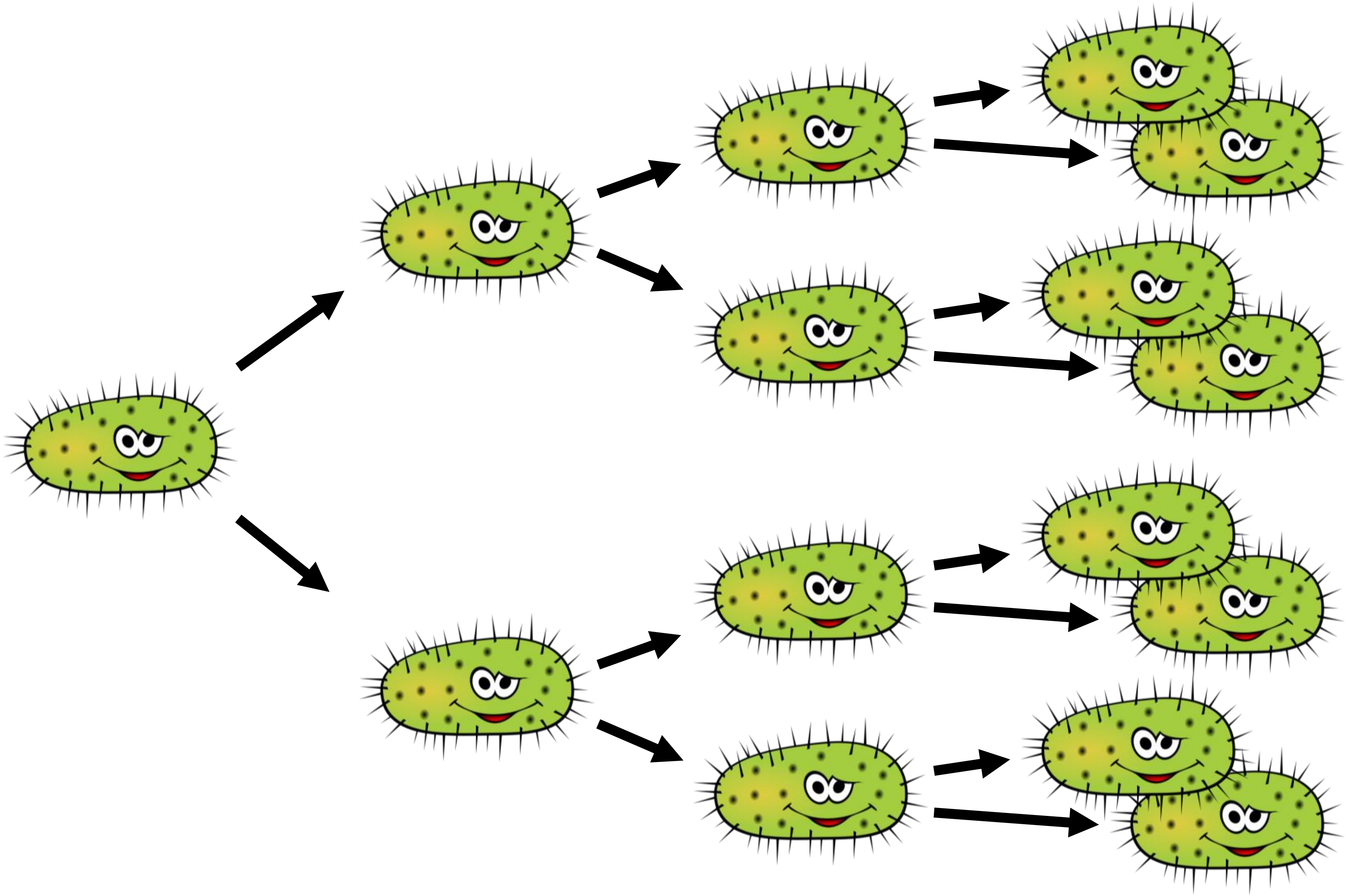
$n(t = 2) = 4$
$= 2^2$

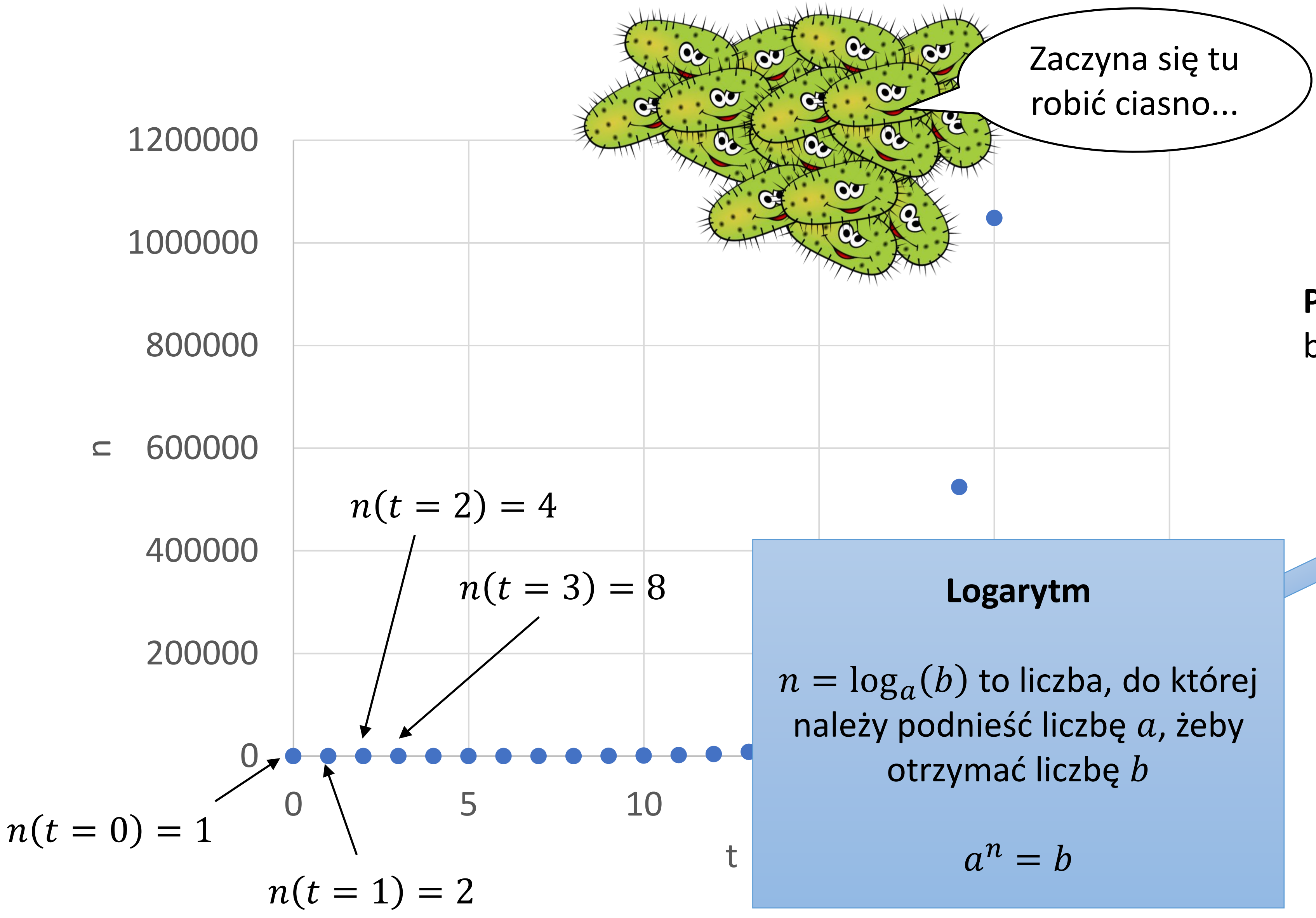
$n(t = 3) = 8$
$= 2^3$

…

$$\boxed{n(t) = 2^t}$$

Funkcja wykładnicza





Logarytm

$n = \log_a(b)$ to liczba, do której należy podnieść liczbę a, żeby otrzymać liczbę b

$$a^n = b$$

Funkcja wykładnicza

$$n(t) = 2^t$$

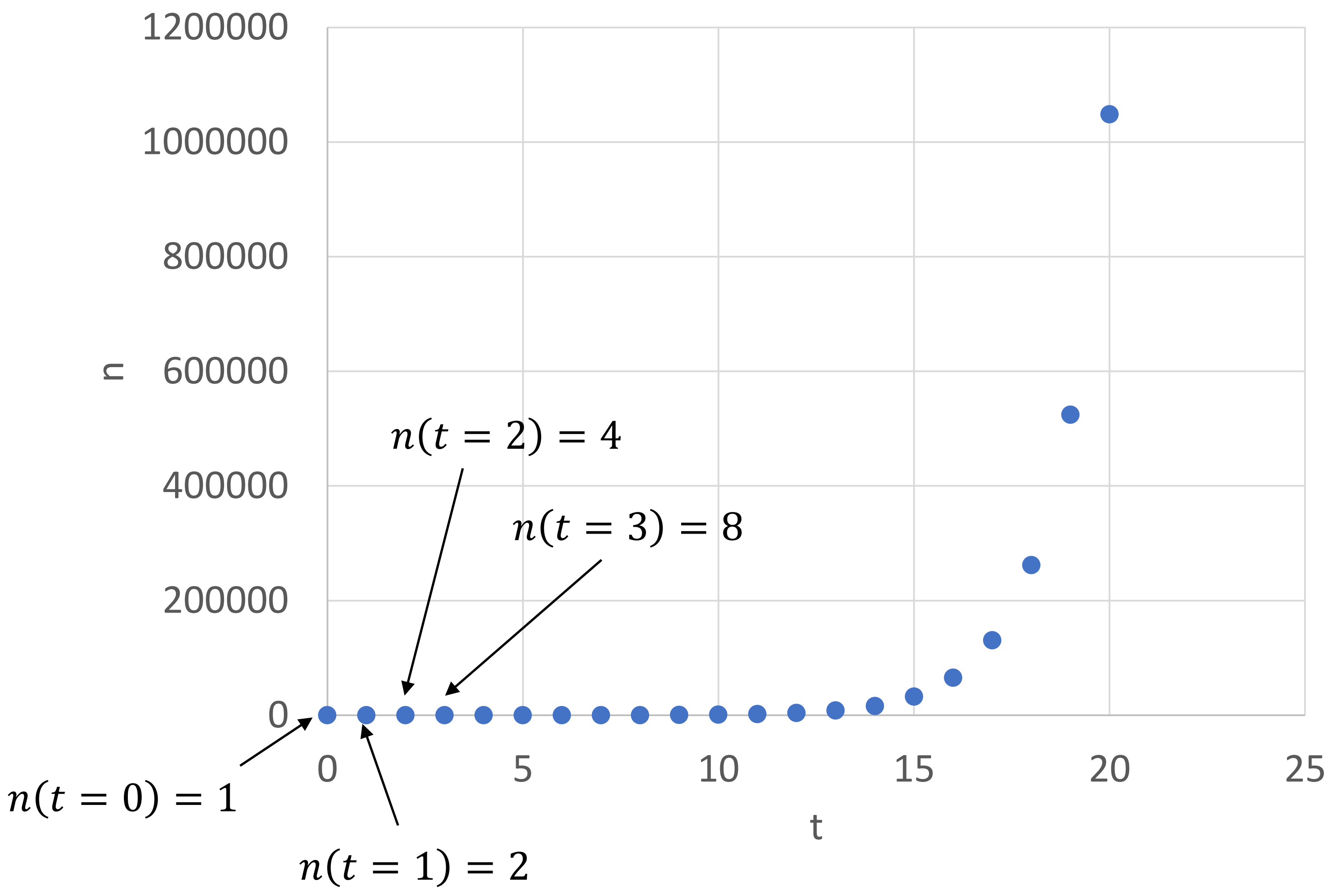
Pytanie 1. Po jakim czasie będziemy mieć 1024 bakterie?

Odp.:

$$t = \log_2(1024) = 10$$

Funkcja wykładnicza

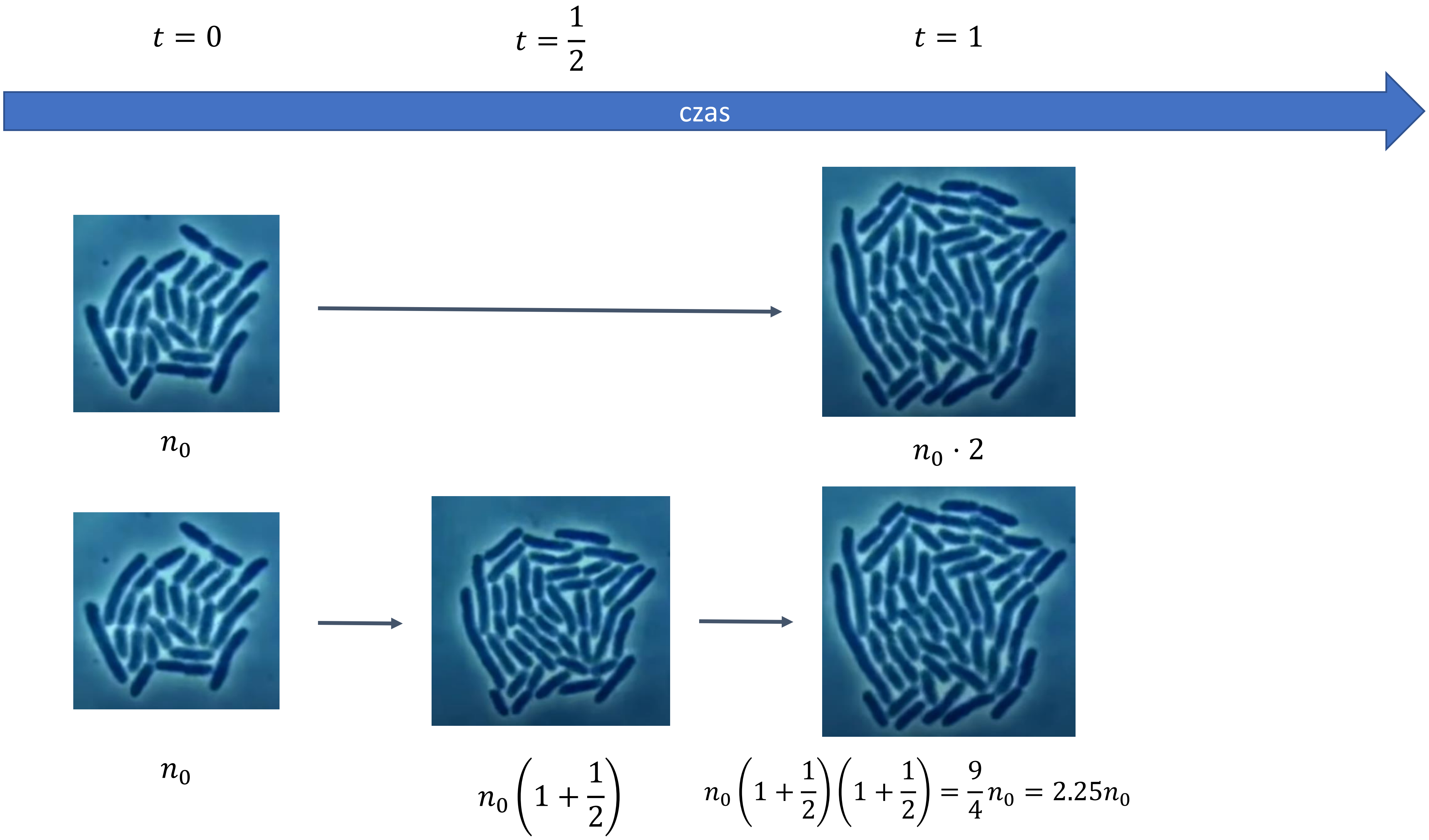
$$n(t) = 2^t$$



Pytanie 2. Po jakim czasie będziemy mieć 1500 bakterii?

$$n(t=10) = 2^{10} = 1024$$

$$n(t=11) = 2^{11} = 2048$$


$t = 0$
$t = \frac{1}{2}$
$t = 1$
czas
n_0
$n_0 \cdot 2$
n_0
$n_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)$
$n_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}n_0 = 2.25n_0$

$t = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $t = 1$

czas

$$n_0 \longrightarrow n_0 \cdot 2$$

$$n_0 \longrightarrow n_0\left(1+\frac{1}{2}\right) \longrightarrow n_0\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}n_0 = 2.25n_0$$

$$n_0 \longrightarrow n_0\left(1+\frac{1}{3}\right) \longrightarrow n_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \longrightarrow n_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.37n_0$$

$$n_0 \rightarrow n_0\left(1+\frac{1}{4}\right) \rightarrow n_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \rightarrow n_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 \rightarrow n_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2.44n_0$$

- $n_0\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \approx 2\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \approx 2.25\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.37\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2.44\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 \approx 2.48\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2.59\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.704\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2.717\,n_0$
- $n_0\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2.718\,n_0$

$$\lim_{k\to\infty} n_0\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \approx 2.718\,n_0$$

Liczba Eulera

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \approx 2.71828\ldots$$

Liczba Eulera

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \approx 2.71828\ldots$$

Leonhard Euler (1707 – 1783)

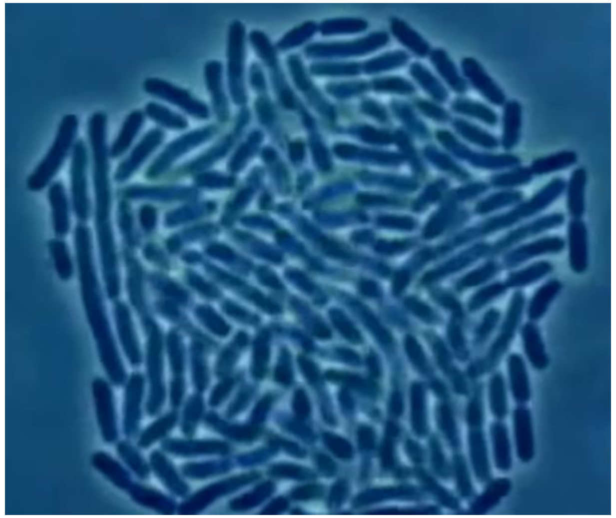
- Liczba Eulera, e
- Równość Eulera, $e^{i\pi}+1=0$
- Ścieżka Eulera i cykl Eulera
- Metoda Eulera

$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ t

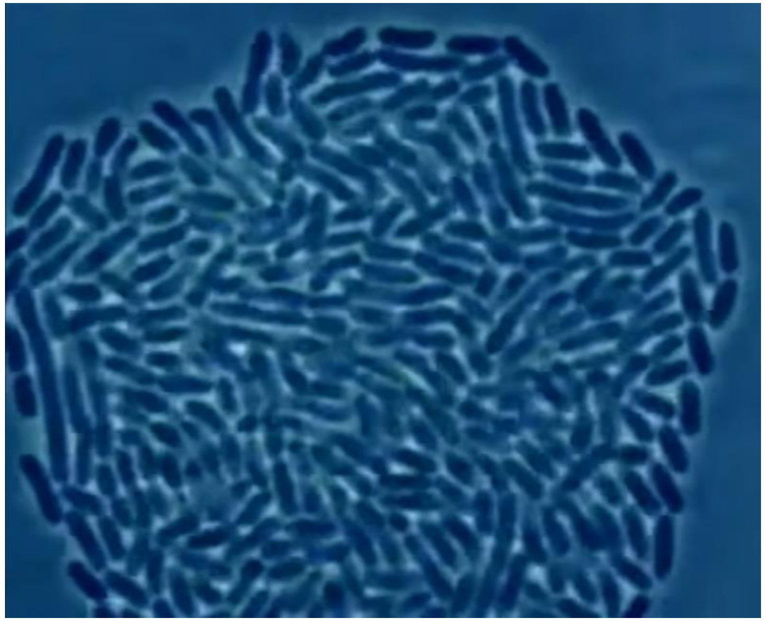
czas

n_0

$e \cdot n_0$



$n_0 \cdot e^2$



$n_0 \cdot e^t$

Liczba bakterii jest opisana następującą funkcją wykładniczą:

$$n(t) = n_0 e^t$$

Co więcej można ją wyznaczyć dla dowolnego czasu t, dzieląc ten czas na nieskończenie wiele "kroków czasowych":

$$e^t = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k$$

Zadanie 1.

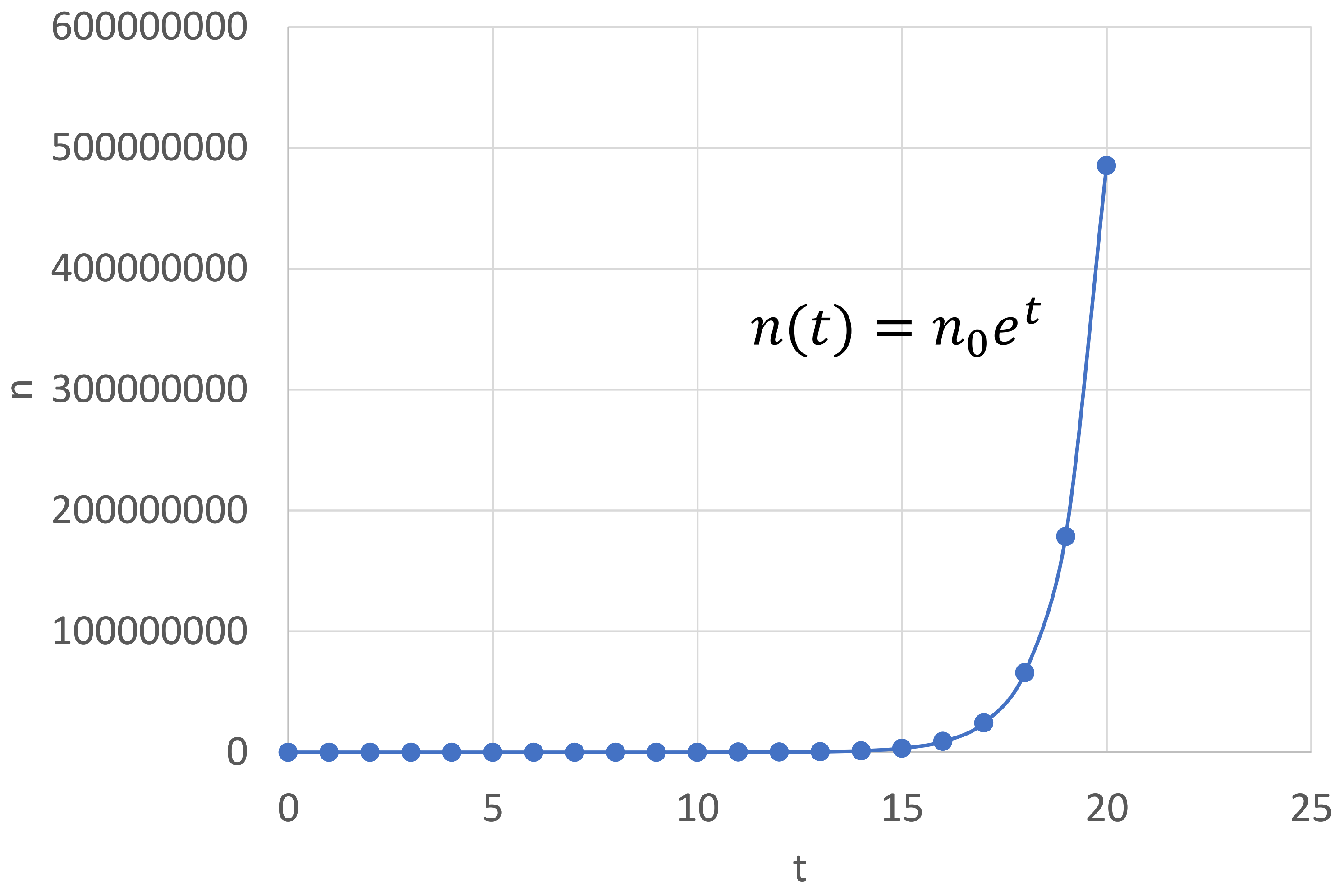
Ilokrotnie zwiększy się liczba bakterii w kolonii po czasie $t = 5$, a ile po czasie $t = 6$?

$$n(5) = e^5 \approx 148$$

$$n(6) = e^6 \approx 403$$

Zadanie 2.

Po jakim czasie kolonia zwiększy się 300-krotnie?



Zadanie 2.

Po jakim czasie kolonia zwiększy się 300-krotnie?

$$e^t = 300$$

$$t = \log_e(300)$$

$$t \approx 5.7$$

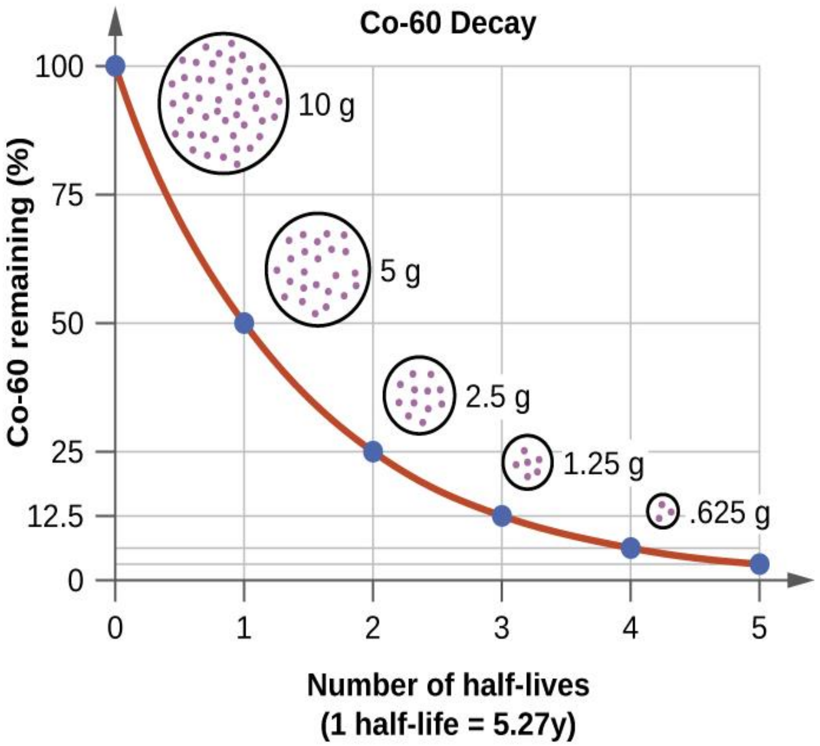
Logarytm o podstawie e jest tak ważny, że ma on swoją własną nazwę, **logarytm naturalny**.

Jest on oznaczany jako $\log(n)$ lub $\ln(n)$.

Podsumowując $t = \log(n)$ to wartość t, która spełnia równanie $n = e^t$

Gdzie jeszcze możemy zaobserwować funkcję wykładniczą?

Inne przykłady wzrostu wykładniczego



Lawinowy wzrost obłożenia POZ. "Liczba jest kosmiczna"

EMILIA GRZELA

email

opublikowano: 16-12-2021, 16:56

Od maja/czerwca 2021 roku nawet o kilkadziesiąt procent wzrasta liczba porad udzielanych w POZ. 25-30 porad dziennie to była norma dla pojedynczego lekarza rodzinnego - mówi Jacek Krajewski, prezes Porozumienia Zielonogórskiego.

E-wydanie „Pulsu Medycy

Koronawirus. 18 stycznia. Kraska: lawinowy wzrost zakażeń. O 72 proc. więcej

Autor: oprac. JPP • Źródło: Rynek Zdrowia, WP, PAP • 18 stycznia 2022 08:16

Koronawirus. 18 stycznia. Zakażenia i zgony. Najnowsze dane epidemiczne zdradził we wtorek rano wiceminister zdrowia Waldemar Kraska. - Piąta fala zapukała do nas i zaczyna się na dobre rozgaszczać w naszych progach - przyznał. Jak dodał dziś odnotowano lawinowy wzrost zakażeń.

Omicron variant fuelling 'exponential' rise in Covid cases, say South Africa officials

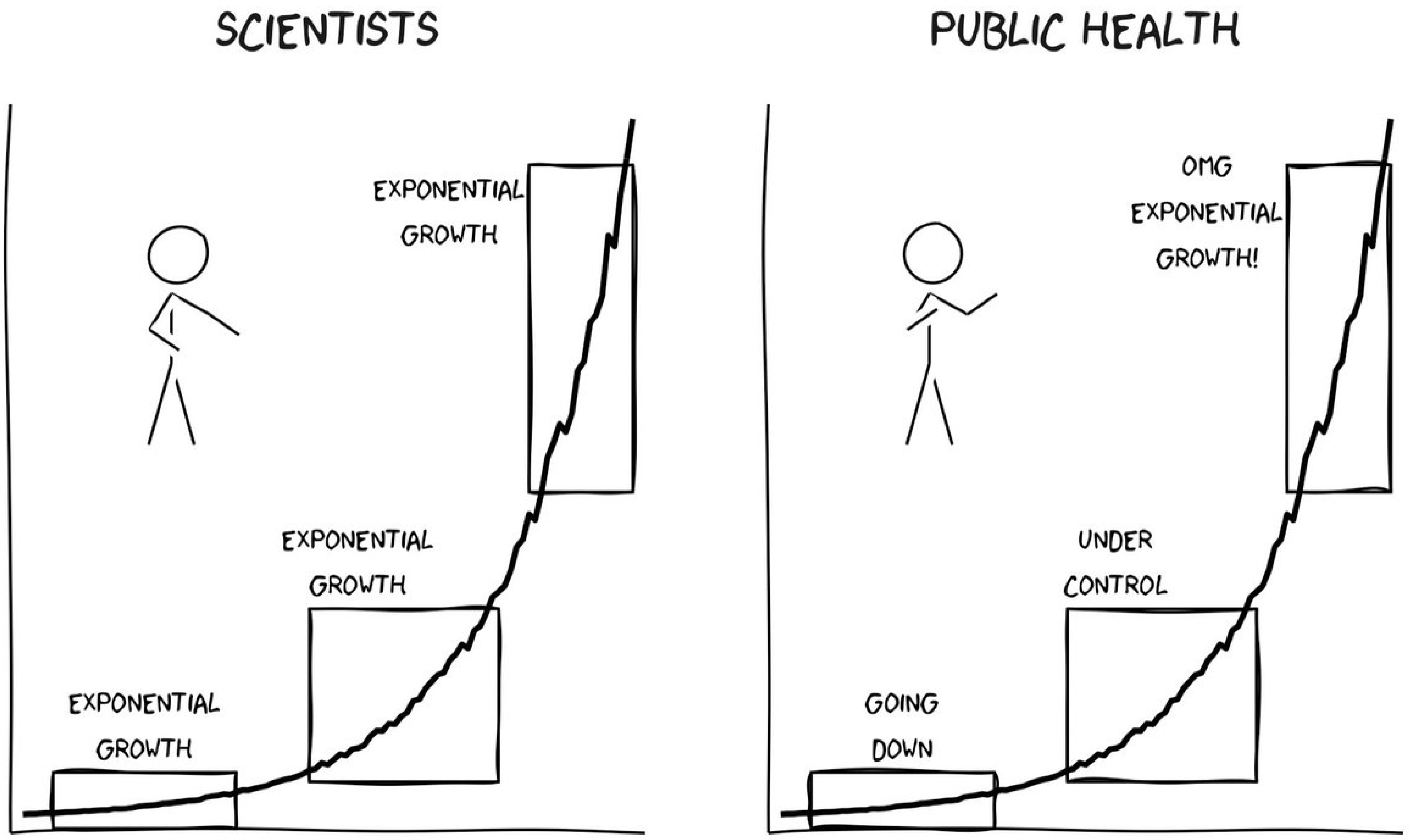
Nearly three-quarters of virus genomes sequenced last month were of new variant, say South African health officials

- **Coronavirus – latest updates**
- **See all our coronavirus coverage**

COVID-19: Germany on brink of new coronavirus restrictions after 'exponential growth' in infections

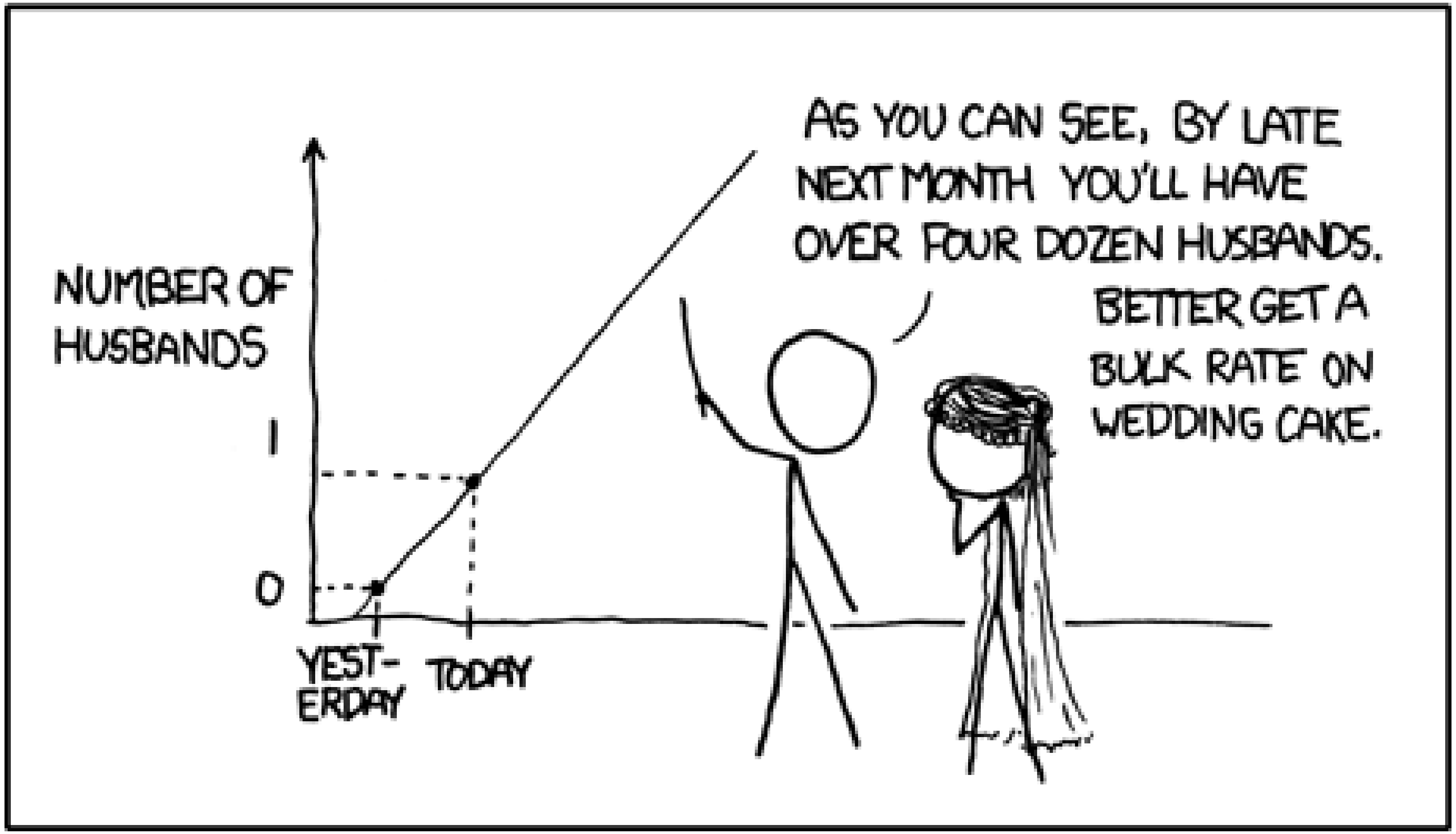
The country's fight against the virus has been held back by a sluggish vaccine delivery programme.

Saturday 20 March 2021 05:35, UK



SCIENTISTS
EXPONENTIAL GROWTH
EXPONENTIAL GROWTH
EXPONENTIAL GROWTH
PUBLIC HEALTH
OMG EXPONENTIAL GROWTH!
UNDER CONTROL
GOING DOWN

MY HOBBY: EXTRAPOLATING



Podsumowanie

- Wprowadziliśmy pojęcie funkcji wykładniczej:

$$n(t) = e^t$$

- Na przykładzie kolonii bakterii zaobserwowaliśmy, ze do opisu ich wzrostu wygodnie jest posługiwać się funkcja wykładniczą o podstawie

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \approx 2.71828\ldots$$

- Poznaliśmy pojęcie logarytmu, w tym bardzo ważny logarytm naturalny, czyli logarytm o podstawie e.