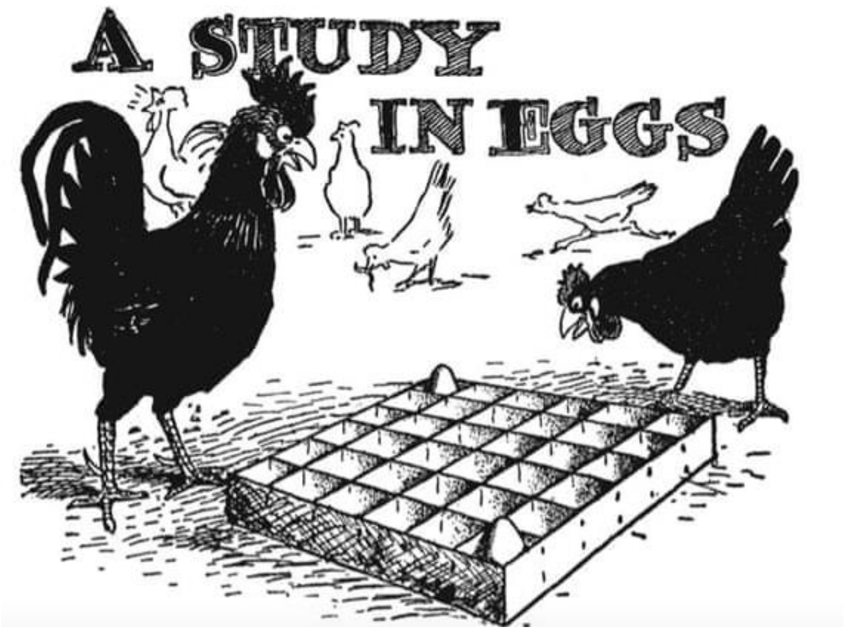
ZAGADKA NA ROZGRZEWKĘ

Dwa jajka zostały umieszone na przeciwległych końcach pudełka o wymiarach 6×6, tak jak przedstawiono na ilustracji. Czy możesz w pozostałych przegródkach umieścić 10 jajek, tak żeby w każdym wierszu, kolumnie i na przekątnej znajdowały się dwa jajka?

Czy można je umieścić tak, żeby żadne dwa jajka nie znajdowały się w sąsiednich przegródkach (jednak mogą dotykać się wierzchołkiem)?

Inspiracja: Alex Bellos' Monday Puzzles

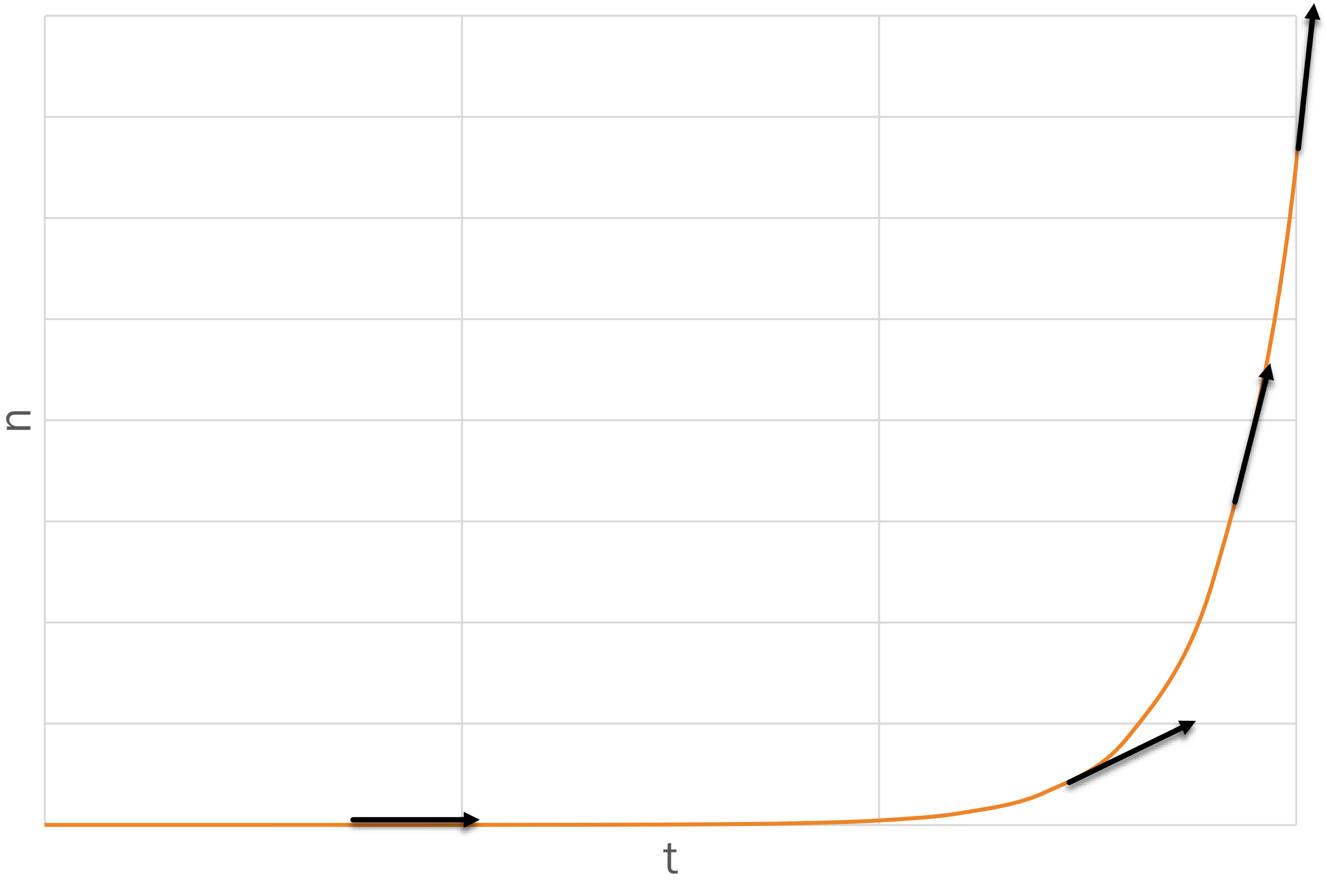


Wykład wkrótce się rozpocznie.

JAK ZMIERZYĆ SZYBKOŚĆ?

CZĘŚĆ 1. WPROWADZENIE DO RÓŻNICZKOWANIA

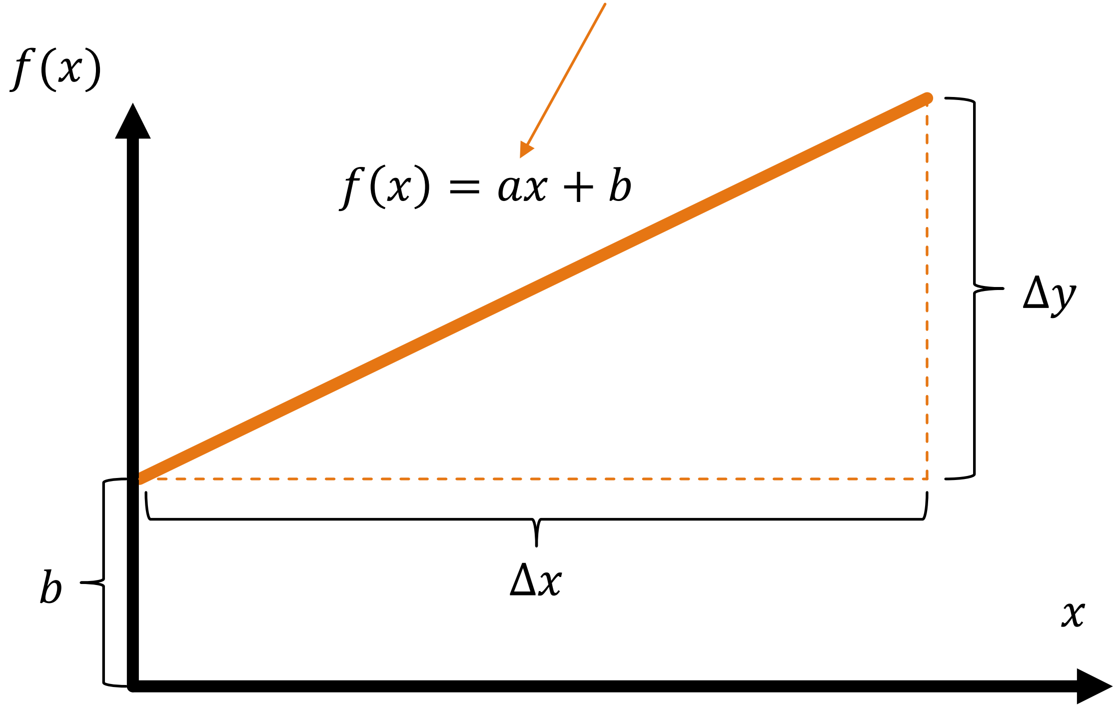
MOTYWACJA



Jak zmierzyć szybkość wzrostu funkcji?

POWTÓRKA ZE SZKOŁY (FUNKCJA LINIOWA)

Współczynnik kierunkowy $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



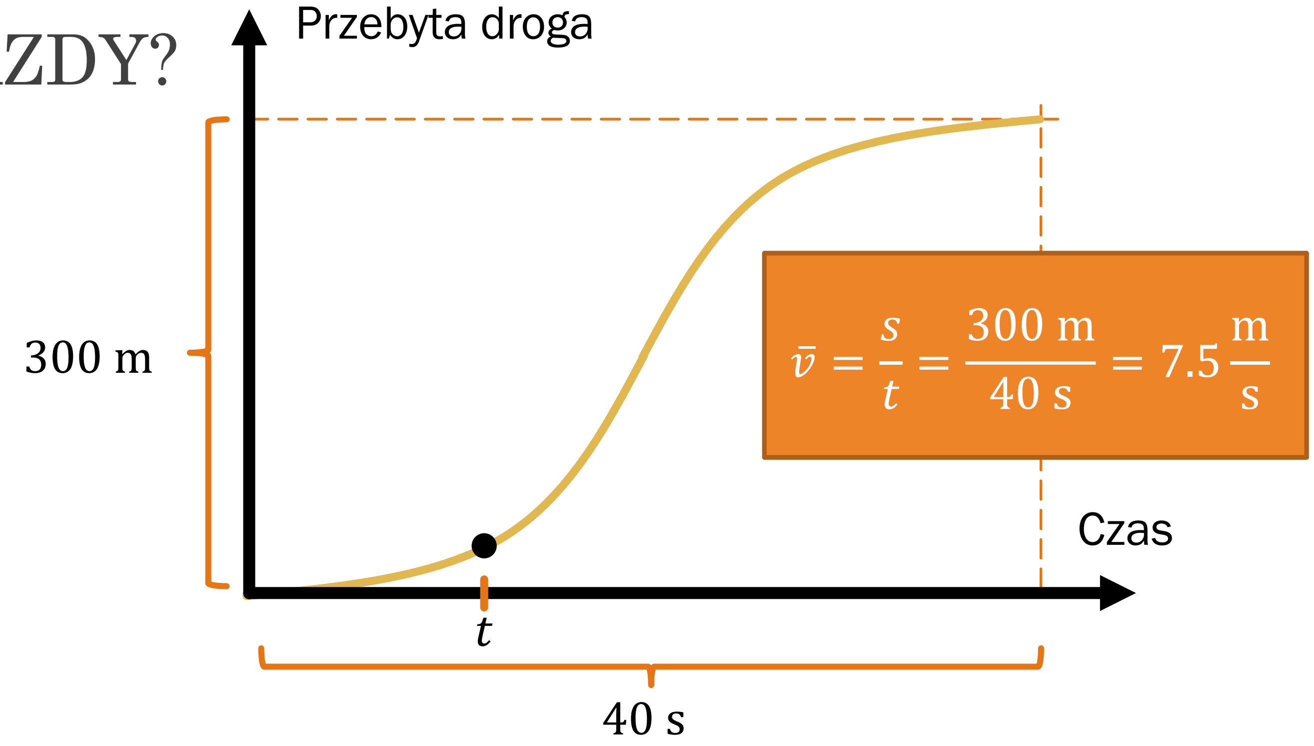
Przykład: ruch jednostajny prostoliniowy

$$\boldsymbol{s(t) = s_0 + vt}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

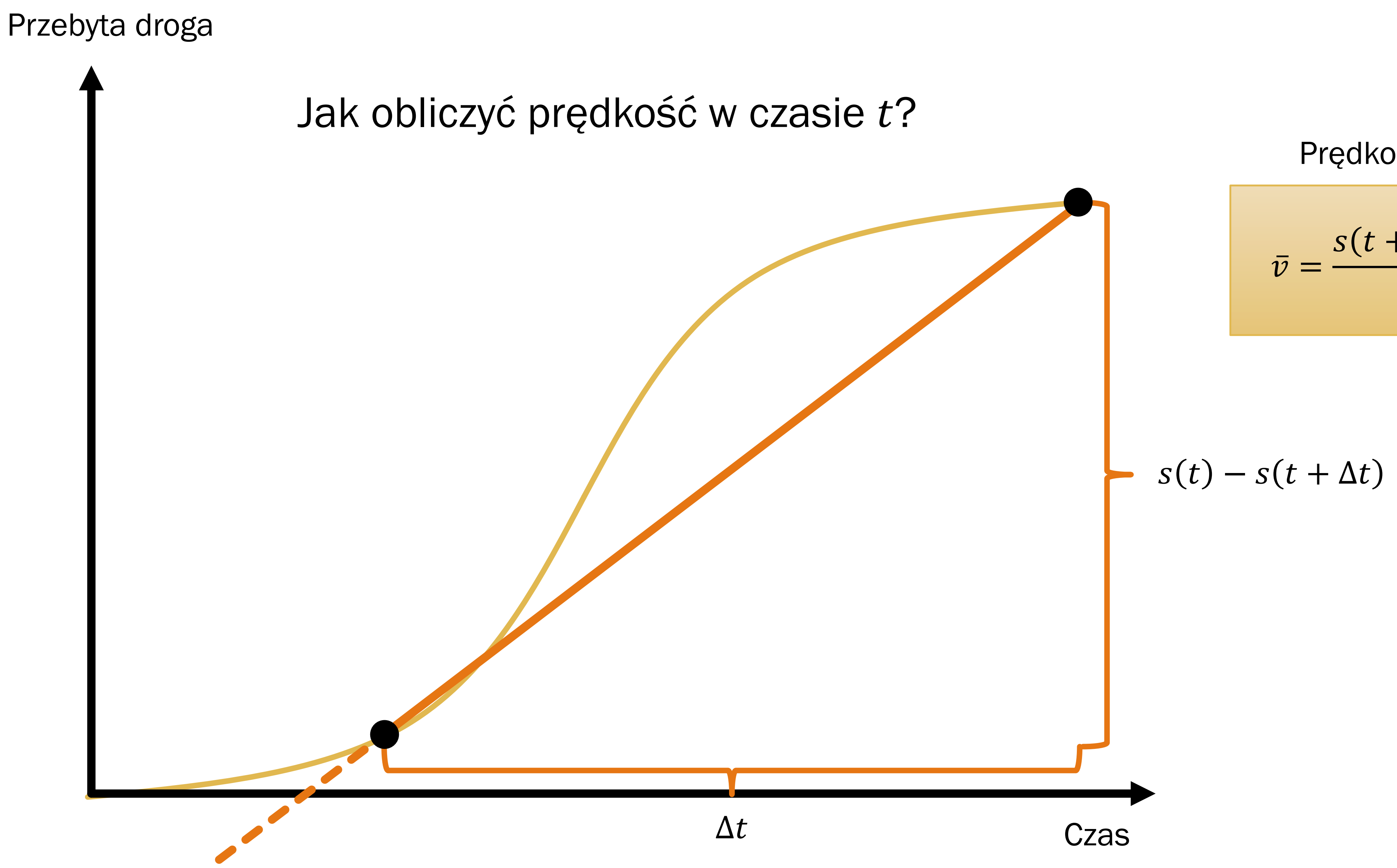
JAK ZMIERZYĆ PRĘDKOŚĆ JAZDY?

Jazda po centrum Warszawy (źródło: City Navigator, YouTube)



Jak obliczyć prędkość w czasie t?

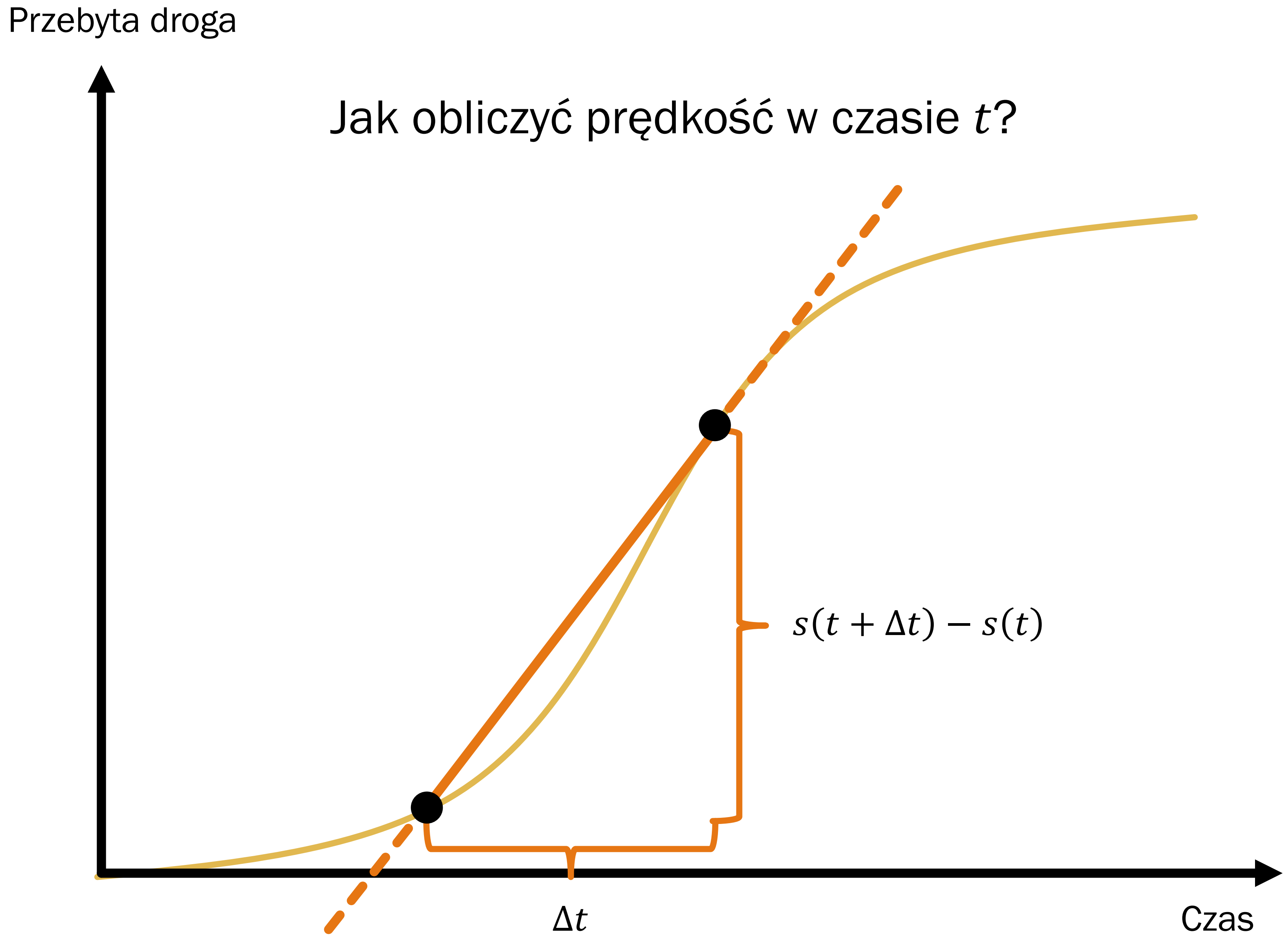
Jak obliczyć prędkość w czasie t?



Prędkość średnia

$$\bar{v} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

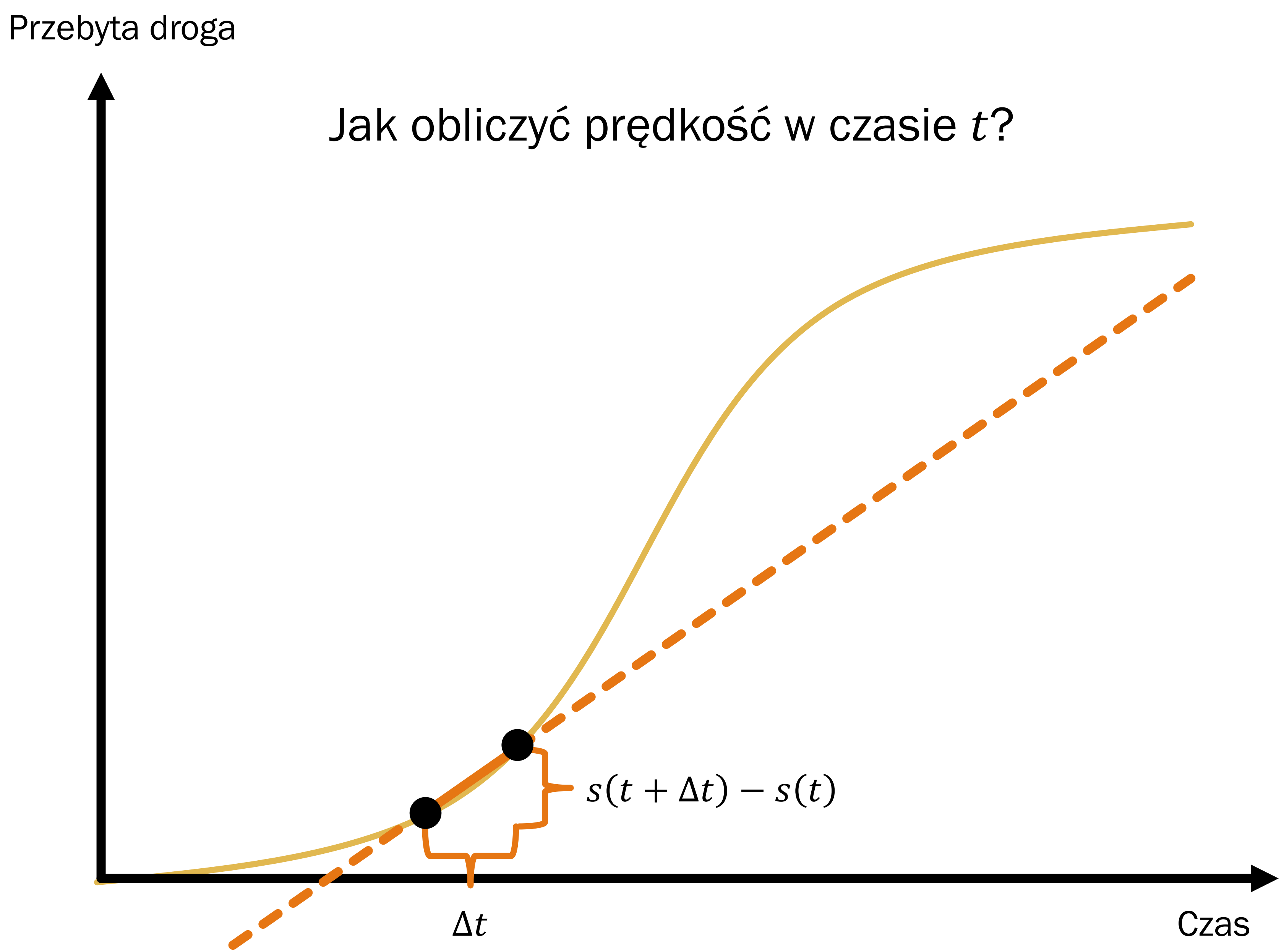
Jak obliczyć prędkość w czasie t?



Prędkość średnia

$$\bar{v} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

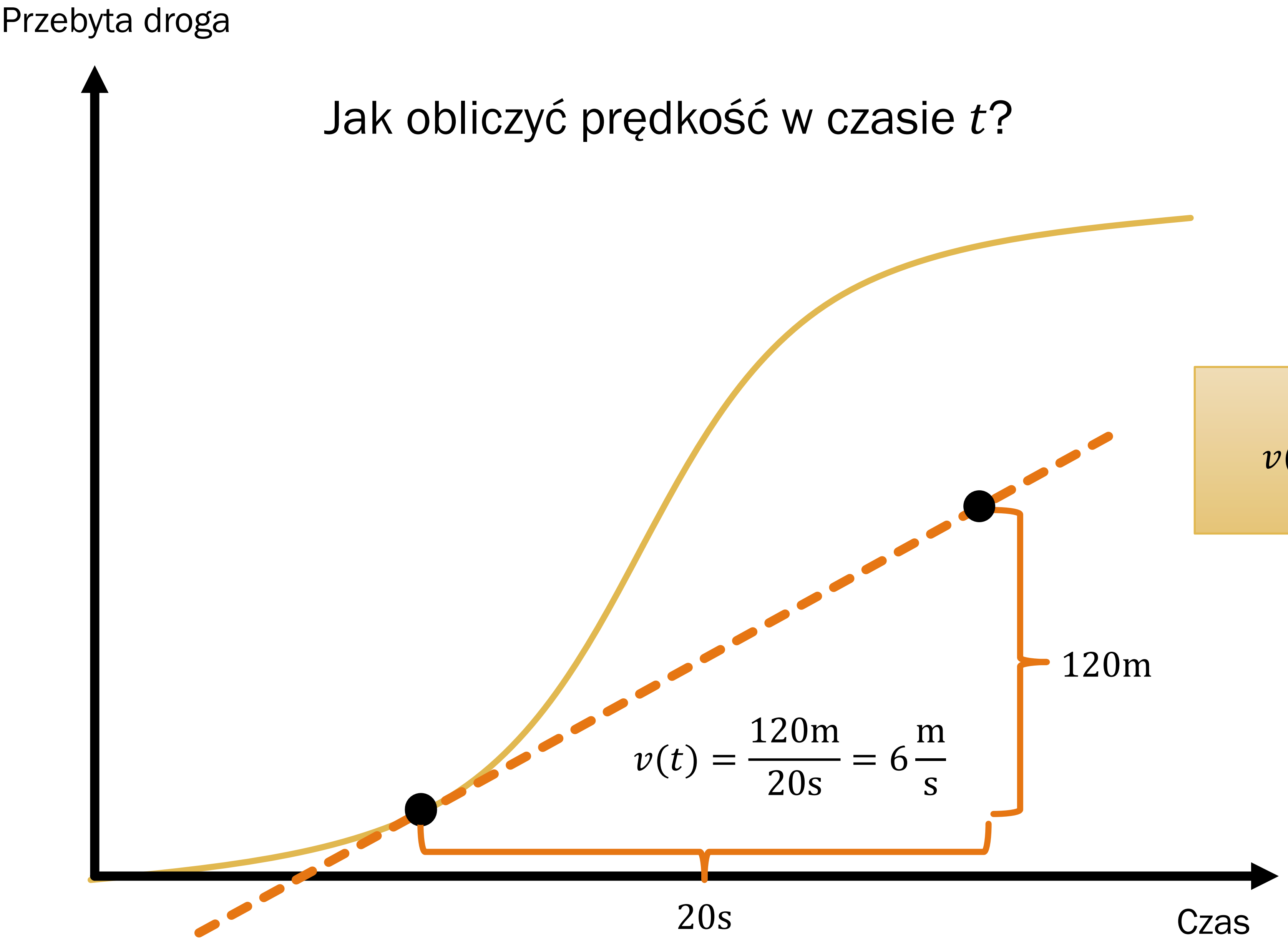
Jak obliczyć prędkość w czasie t?



Prędkość średnia

$$\bar{v}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Jak obliczyć prędkość w czasie t?



Prędkość średnia

$$\bar{v} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Prędkość chwilowa

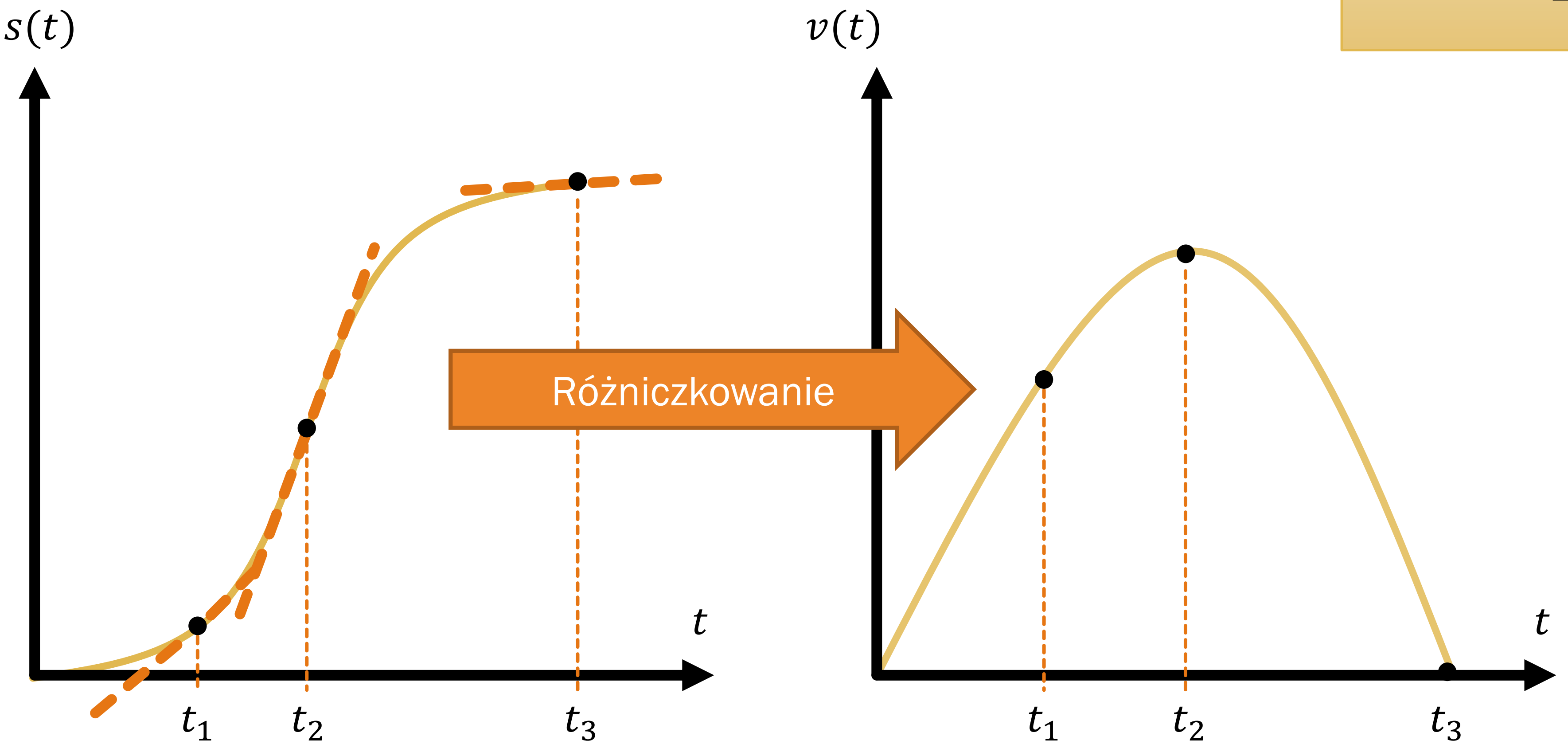
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

POCHODNA FUNKCJI

Pochodna funkcji $s(t)$

Prędkość chwilowa

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

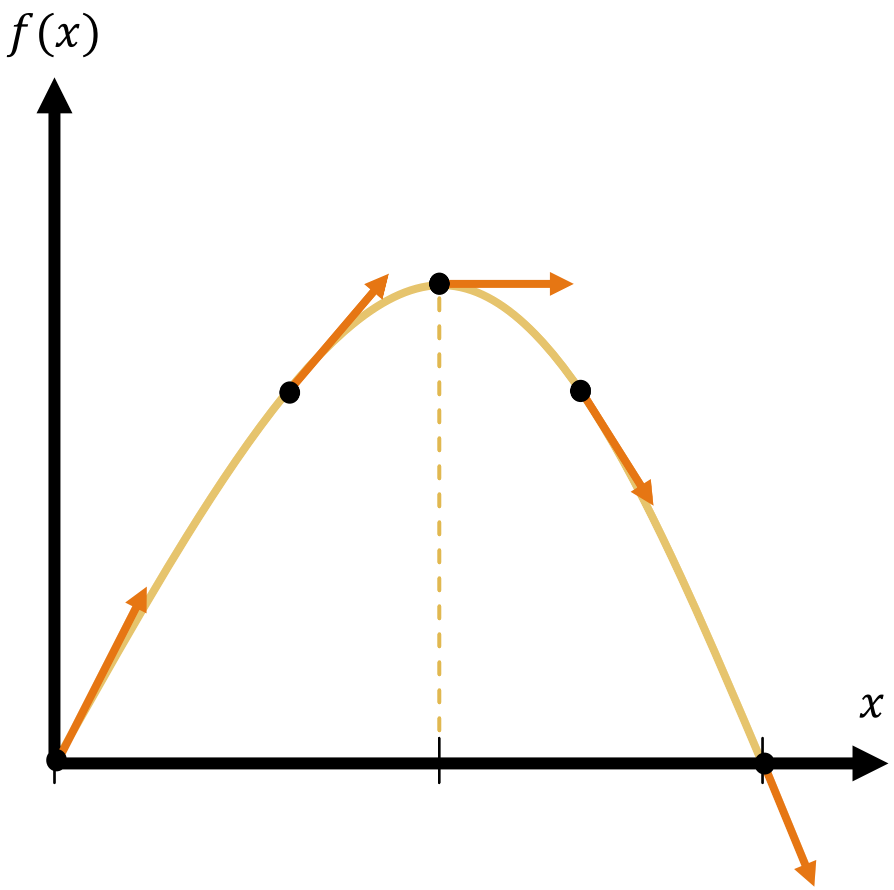


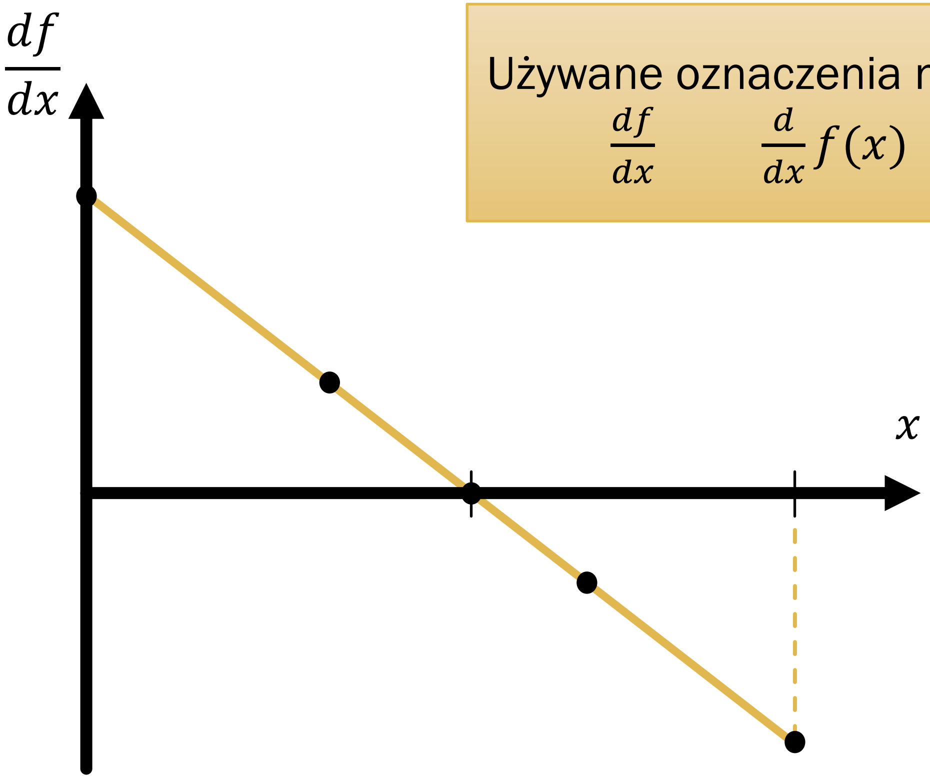
POCHODNA FUNKCJI

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Używane oznaczenia na pochodną:

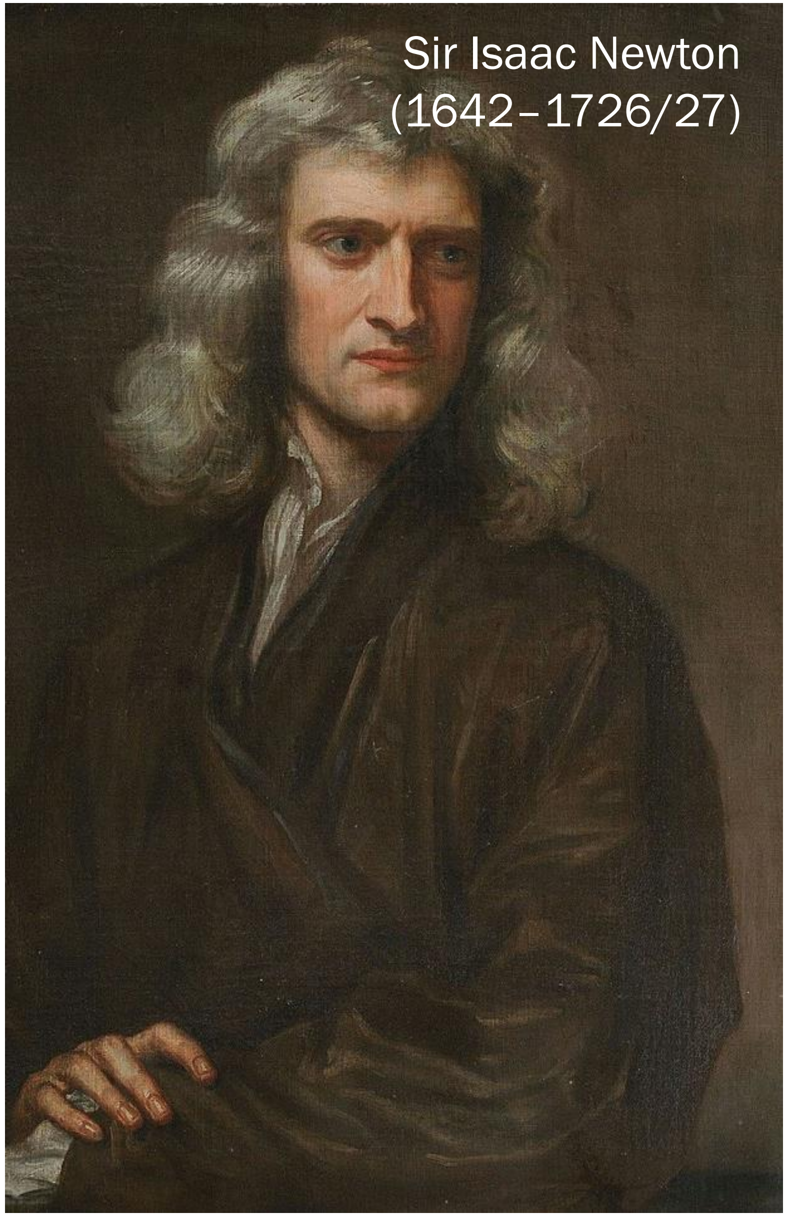
$\frac{df}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f'(x)$

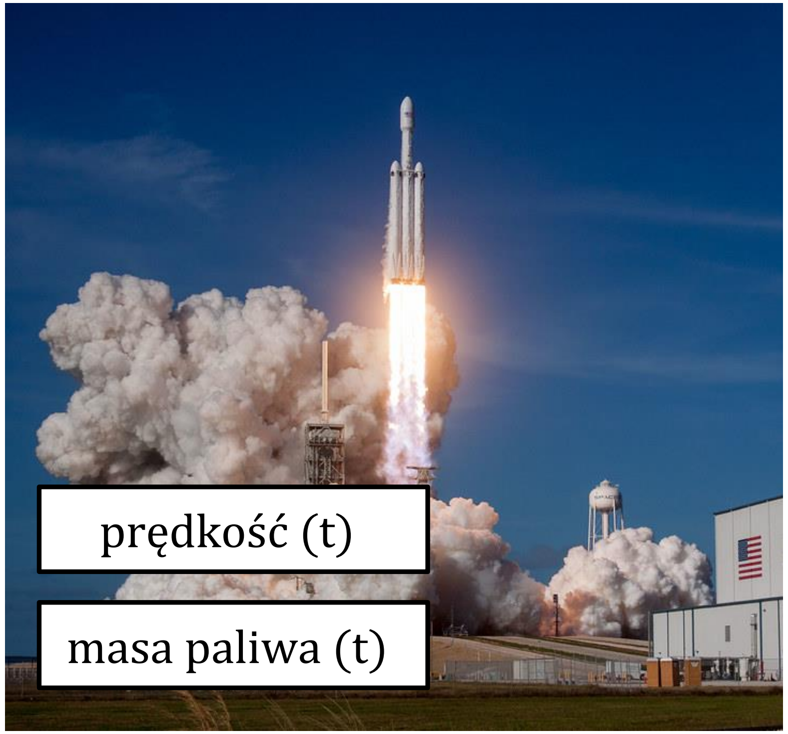


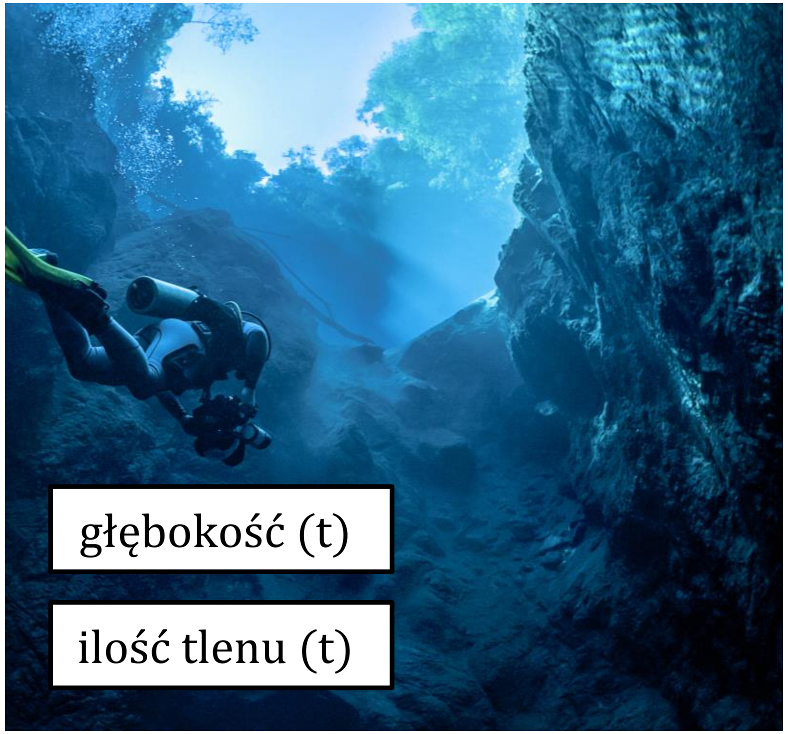


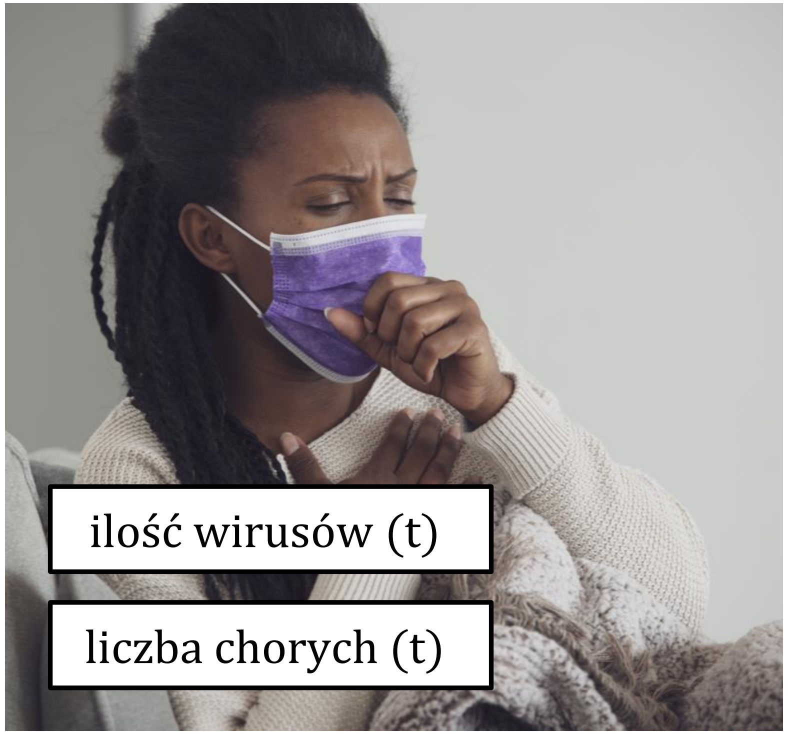
POCHODNE – PRZEŁOM W MATEMATYCE I FIZYCE


Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)


Sir Isaac Newton
(1642–1726/27)





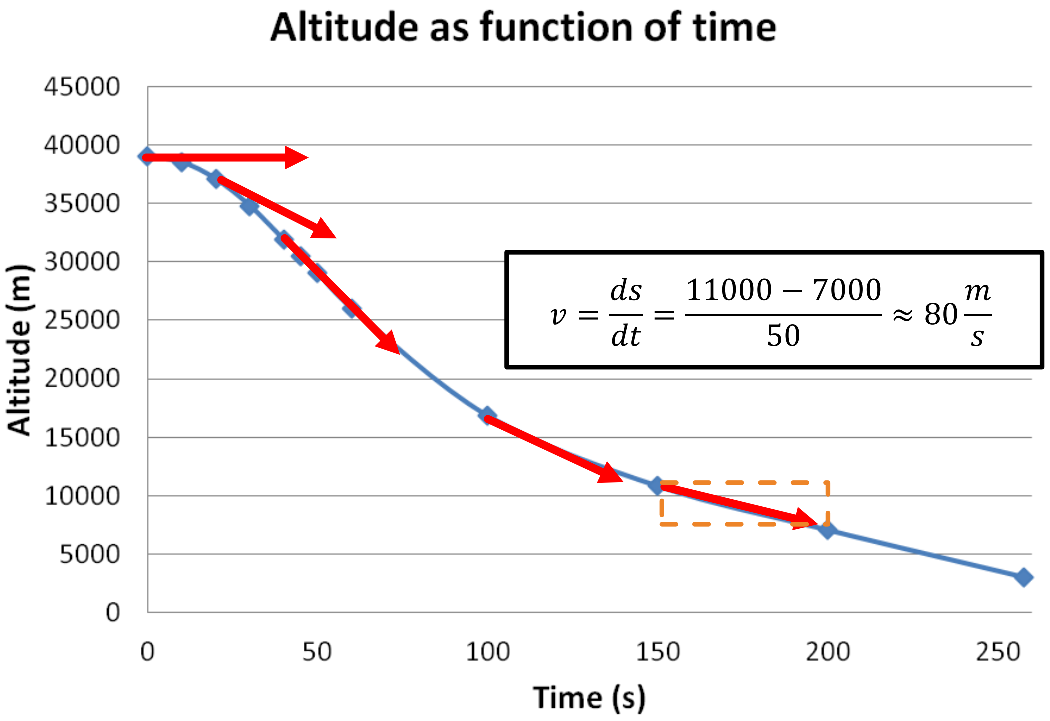


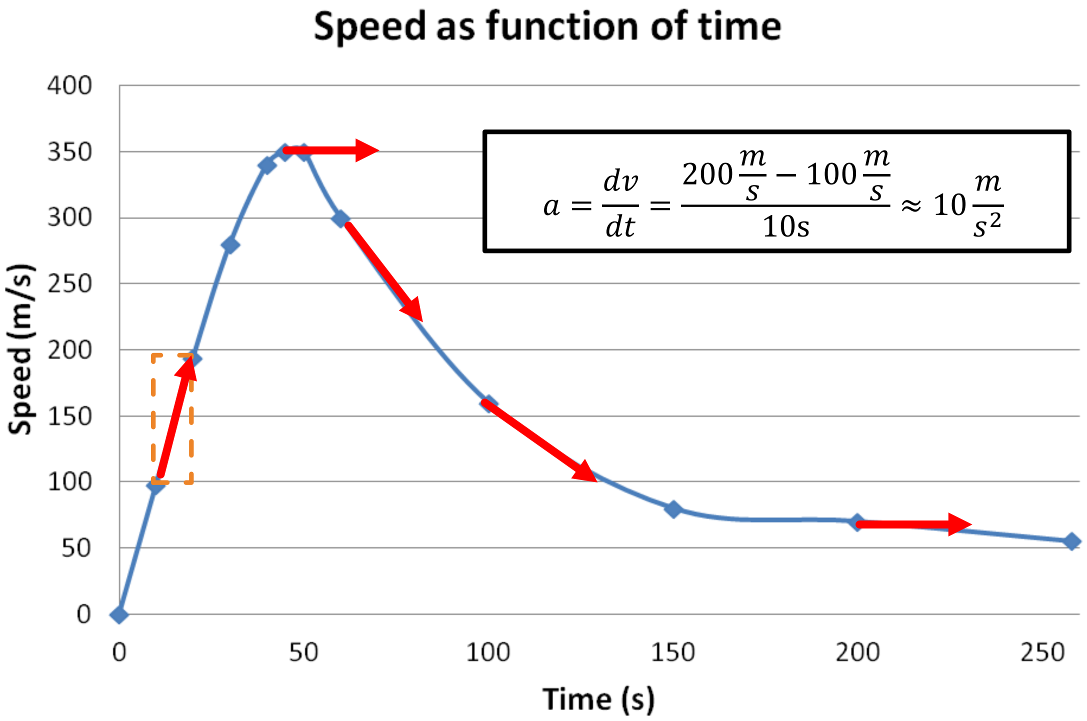
KILKA PRZYKŁADÓW Z ŻYCIA

Źródło: https://www.chartwellspeakers.com/speaker/felix-baumgartner/

Źródło: Felix Baumgartner's supersonic freefall from 128k' - Mission Highlights (Red Bull, YouTube)
https://www.youtube.com/watch?v=FHtvDA0W34I&ab_channel=RedBull

PRZYKŁAD Z ŻYCIA: SKOK ZE STRATOSFERY





Źródło: theengineerspulse.blogspot.com

NUMERYCZNE ZNAJDOWANIE POCHODNEJ

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Chcemy zróżnicować pewną funkcję, np. $f(x) = x^2$ w wybranym punkcie, np. $x = 3$.
- Przyjmijmy pewne małe $\Delta \mathrm{x}$, np. $\Delta \mathrm{x} = 0.01$.
- Pochodną możemy oszacować w następujący sposób:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(3 + 0.01)^2 - 3^2}{0.01} = 6.01$$

- Im mniejsze $\Delta \mathrm{x}$ weźmiemy tym dokładniejsze będzie nasze przybliżenie. Sprawdźmy to!

NUMERYCZNE ZNAJDOWANIE POCHODNEJ

- Im mniejsze Δx weźmiemy tym dokładniejsze będzie nasze przybliżenie. Sprawdźmy to!
  - $\Delta x = 1$ $\quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(3+1)^2-3^2}{1} = 7$
  - $\Delta x = 0.01$ $\quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(3+0.01)^2-3^2}{0.01} = 6.01$
  - $\Delta x = 10^{-4}$ $\quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(3+10^{-4}\right)^2-3^2}{10^{-4}} \approx 6.0001$
  - $\Delta x = 10^{-6}$ $\quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(3+10^{-6}\right)^2-3^2}{10^{-6}} \approx 6.000001$
  - $\Delta x \to 0$ $\quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to 6$

NUMERYCZNE ZNAJDOWANIE POCHODNEJ

Hipoteza: $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

- Sprawdźmy wartość pochodnej dla różnych punktów dla $\Delta x = 10^{-6}$
  - $\frac{df}{dx}(x=1) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(1+10^{-6})^2-1^2}{10^{-6}} = 2.000001 \approx 2$
  - $\frac{df}{dx}(x=2) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(2+10^{-6})^2-2^2}{10^{-6}} = 4.000001 \approx 4$
  - $\frac{df}{dx}(x=3) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(3+10^{-6})^2-3^2}{10^{-6}} = 6.000001 \approx 6$
  - $\frac{df}{dx}(x=4) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(4+10^{-6})^2-4^2}{10^{-6}} = 8.000001 \approx 8$

JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

- **Przykład 1.** Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$

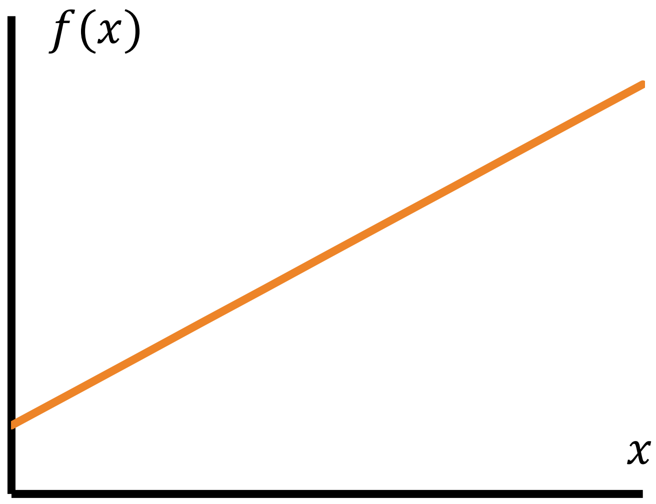
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

W przypadku funkcji stałej $a = 0$, jej pochodna wynosi $\frac{df}{dx} = 0$.



JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

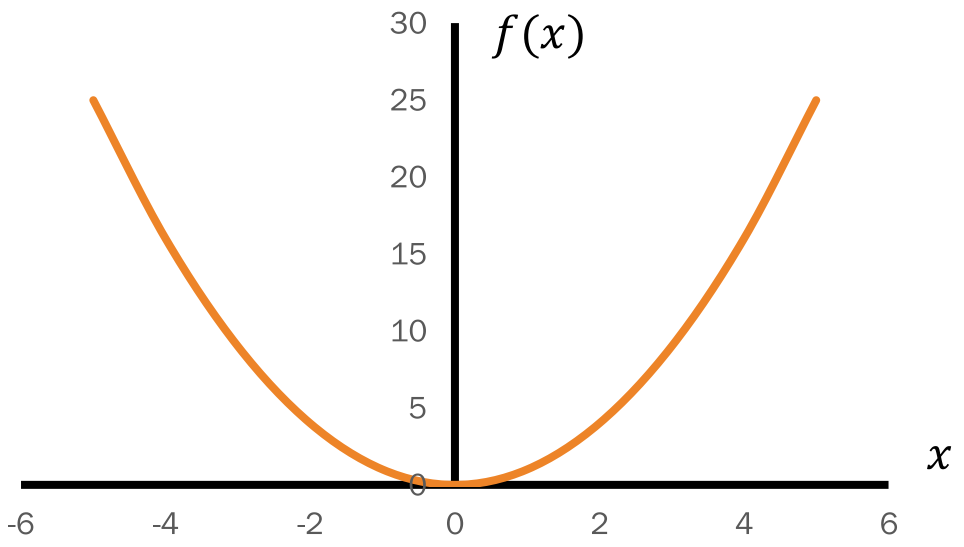
- **Przykład 2.** Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$

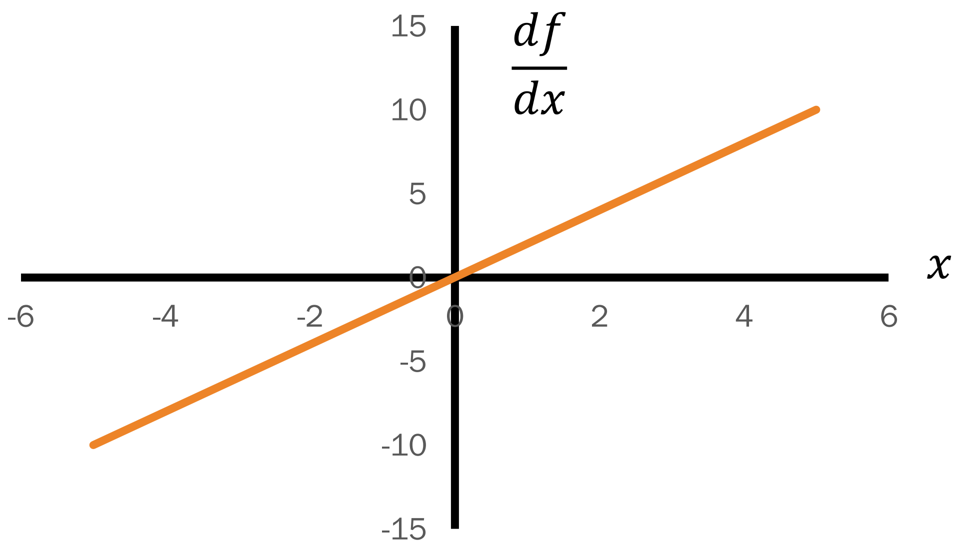
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$





JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

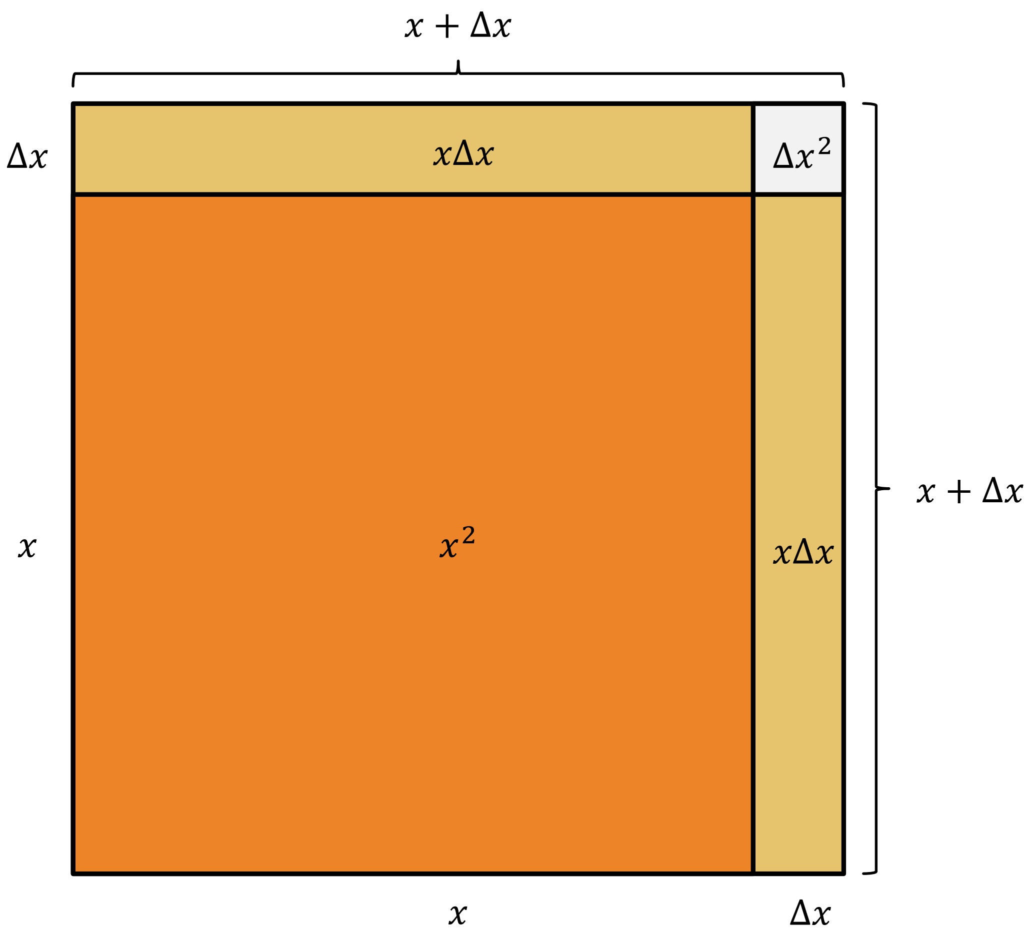
- **Przykład 2.** Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$



JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

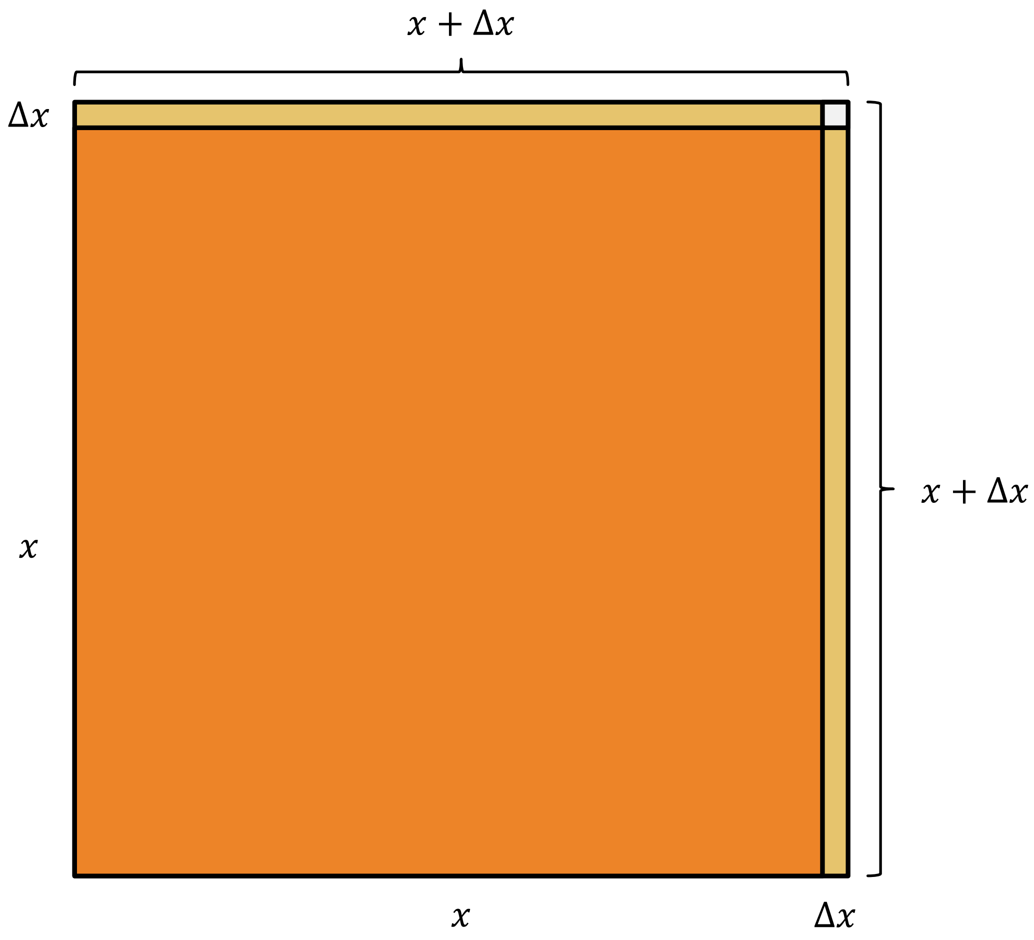
- **Przykład 2.** Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

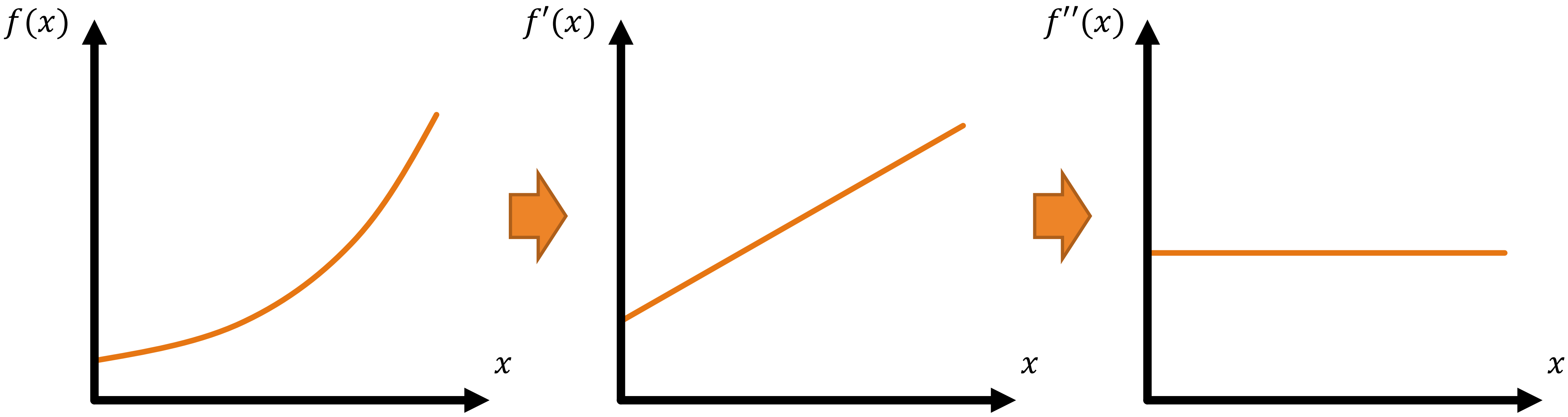
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

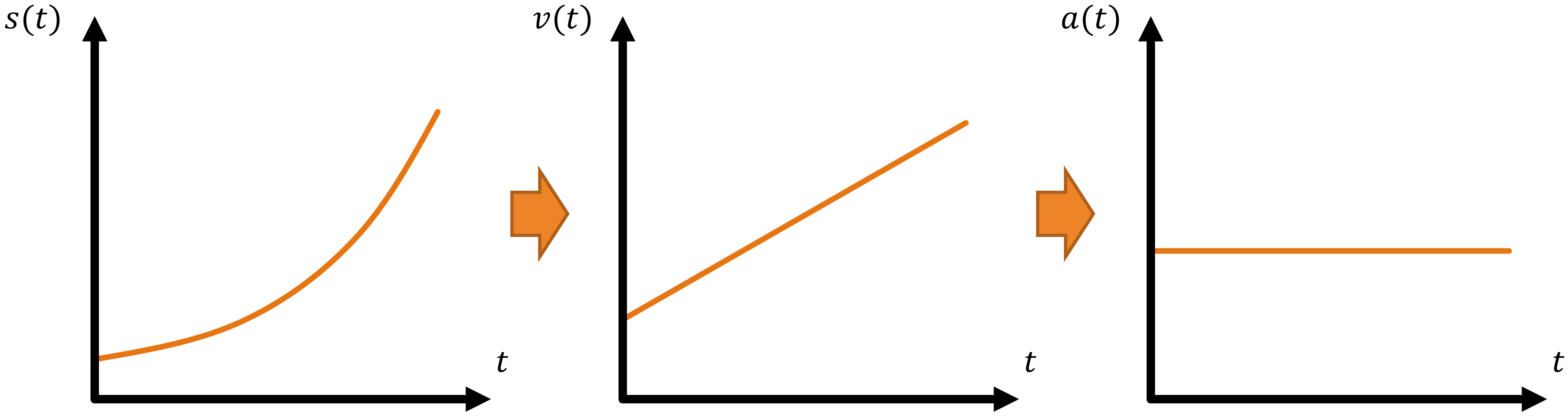


WYŻSZE POCHODNE



Inne oznaczania na wyższe pochodne: $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$

PRZYKŁAD: RUCH JEDNOSTAJNIE PRZYSPIESZONY



Droga:

$$s(t)$$

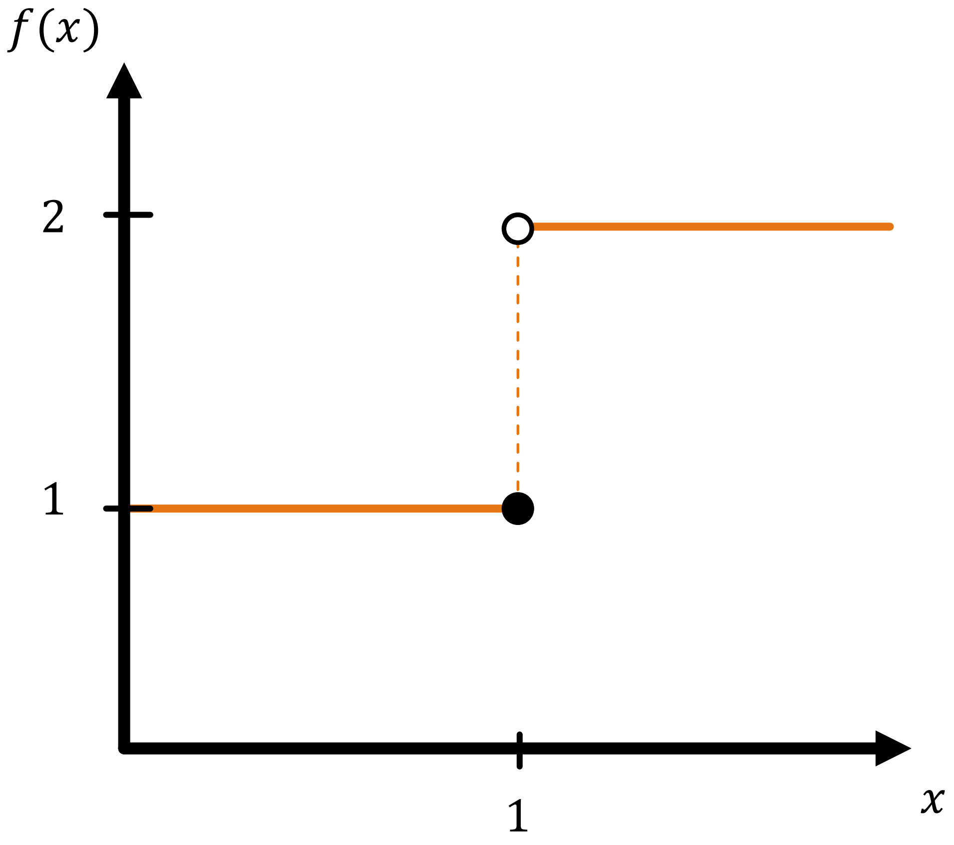
Prędkość:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Przyspieszenie:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

CZY KAŻDĄ FUNKCJĘ MOŻNA ZRÓŻNICZKOWAĆ? NIE.



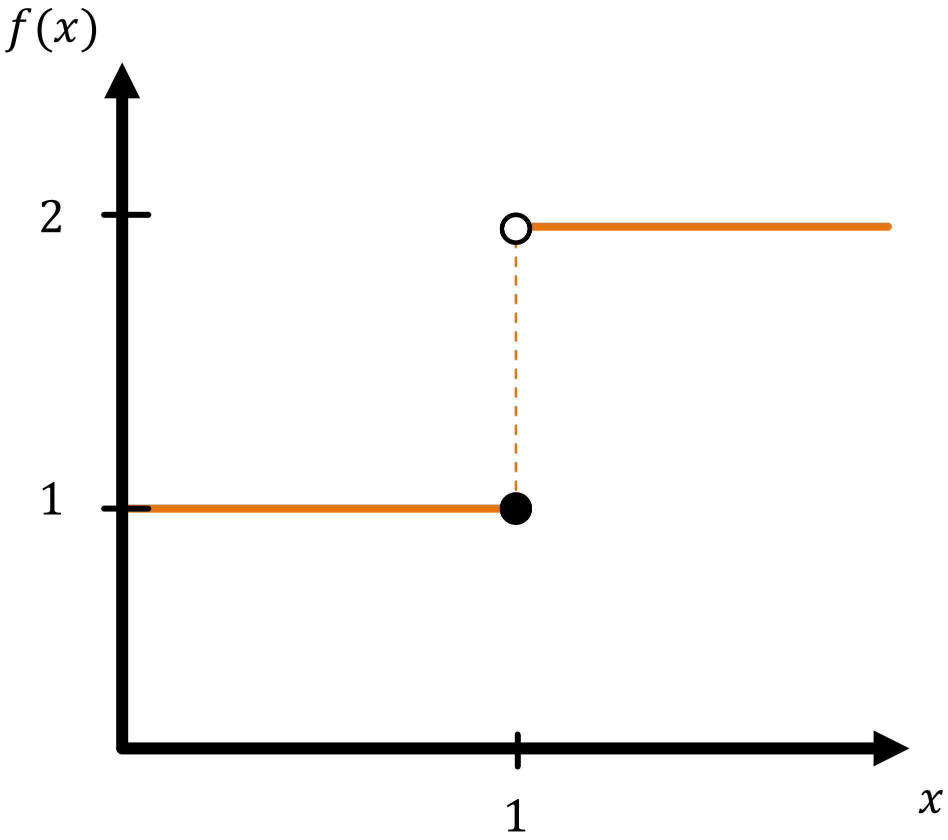
$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

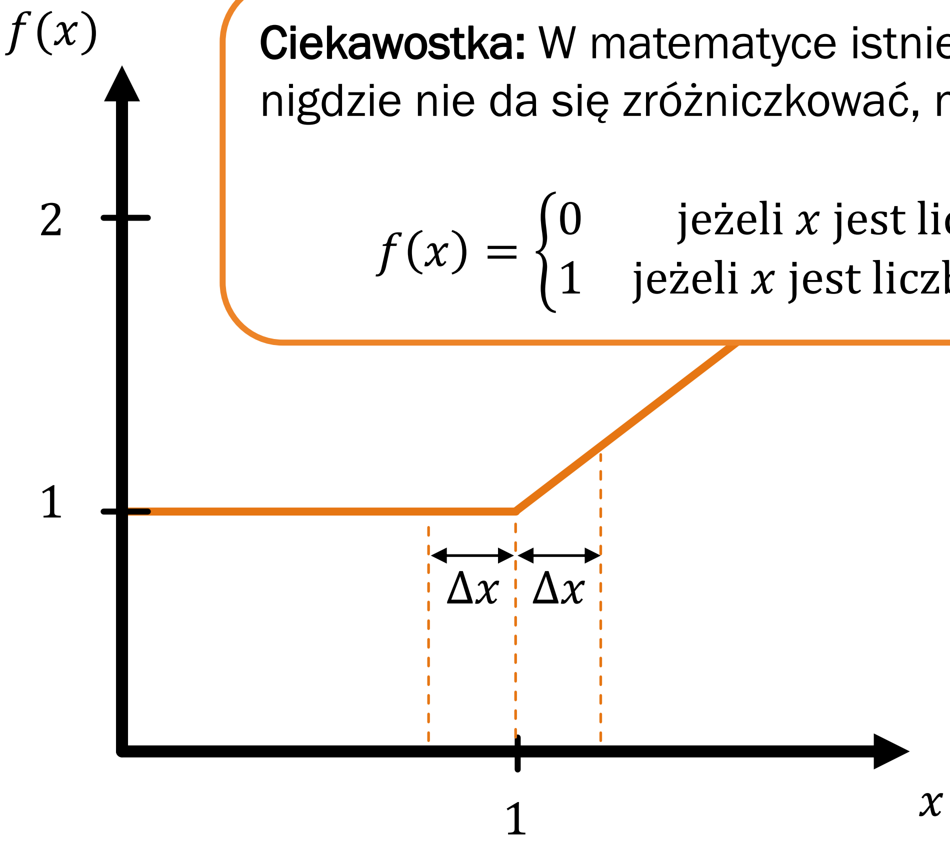
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2-1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \infty ?$$

CZY KAŻDĄ FUNKCJĘ MOŻNA ZRÓŻNICZKOWAĆ? NIE.





Ciekawostka: W matematyce istnieją funkcje, których nigdzie nie da się zróżniczkować, np. funkcja Dirichleta:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x \text{ jest liczą wymierną} \\ 1 & \text{jeżeli } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

PODSUMOWANIE

- Pochodna opisuje szybkość wzrostu funkcji. Pochodna funkcji $f(x)$ jest zdefiniowana jako:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Możemy ją wyznaczyć graficznie znajdując nachylenie stycznej do wykresu.
- Już wiemy jak obliczyć pochodne **numerycznie** za pomocą kalkulatora.
- Już wiemy jak obliczyć pochodne prostych funkcji **analitycznie**, np. $f(x) = x^2$
- Za tydzień nauczymy się obliczać pochodne dużo bardziej skomplikowanych funkcji, np.:

$$f(x) = \frac{x^4 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 5}}}{1 + e^{5x^2}}$$

Źródło: www.houstonpettalk.com