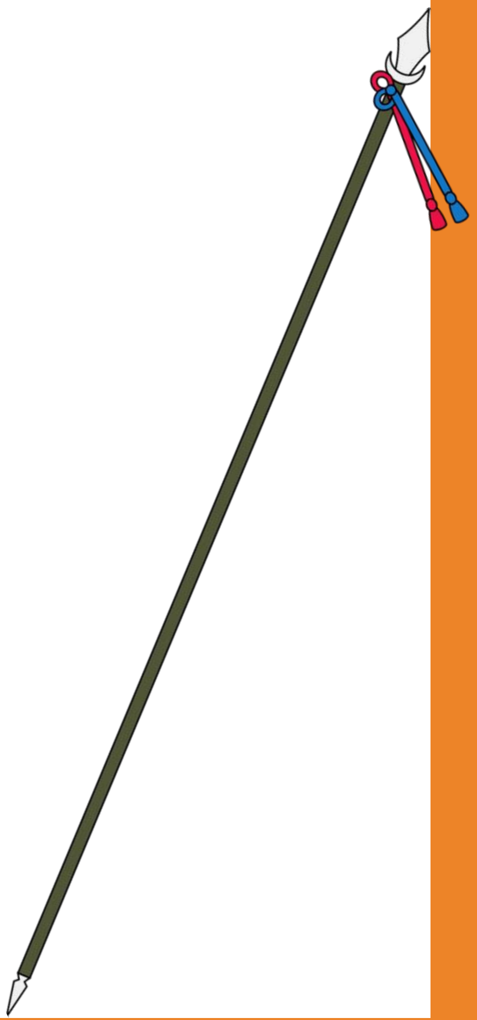
ZADANIE NA ROZGRZEWKĘ

„Włócznia o długości 30 stoi pionowo oparta o ścianę.
Jeśli górny koniec włóczni ześliźnie się w dół po ścianie o 6,
to jak daleko oddali się dolny jej koniec od ściany?”

Zagadka pochodzi z tablicy babilońskiej z około 1800 roku p.n.e.

Wykład wkrótce się rozpocznie.



JAK ZMIERZYĆ SZYBKOŚĆ?

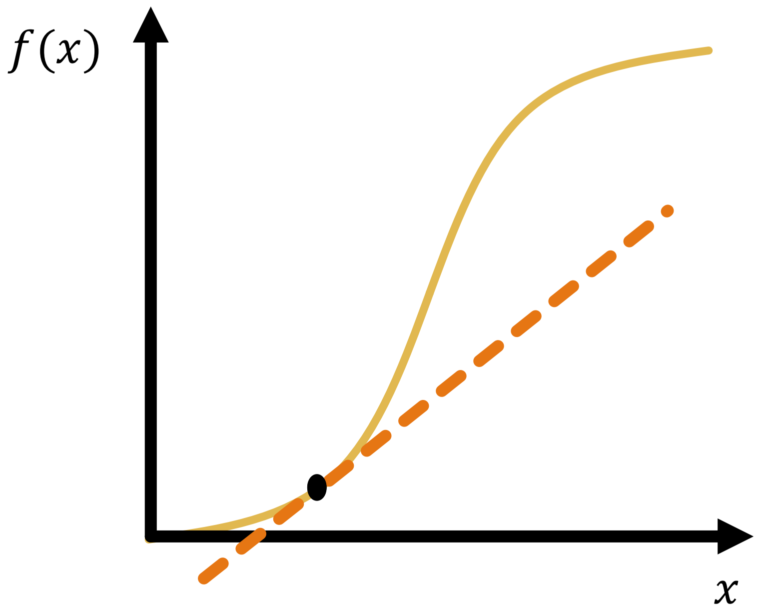
CZĘŚĆ 2. WŁASNOŚCI POCHODNYCH

PRZYPOMNIENIE OSTATNIEGO WYKŁADU

- Pochodna opisuje szybkość wzrostu funkcji. Pochodna funkcji $f(x)$ jest zdefiniowana jako:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Możemy ją wyznaczyć graficznie znajdując nachylenie stycznej do wykresu.
- Już wiemy jak obliczyć pochodne numerycznie za pomocą kalkulatora.
- Już wiemy jak obliczyć pochodne prostych funkcji analitycznie, np. $f(x) = x^2$



JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

- **Przykład 3.** Funkcja $f(x) = x^3$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) =$$
$$= 1\ a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^3 + 1\ b^4$$

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$
$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$
$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$

JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

- **Przykład 3.** Funkcja $f(x) = x^3$

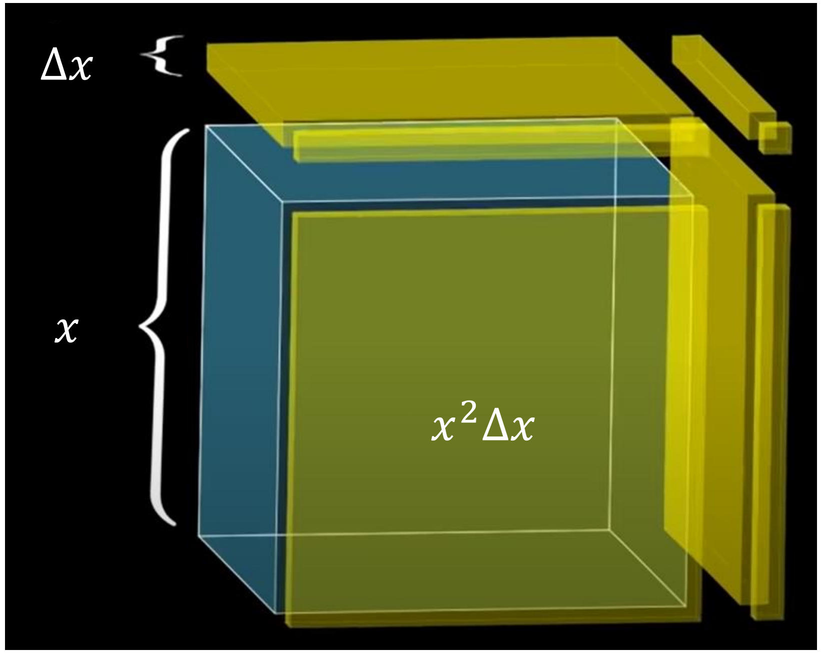
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$$



Źródło: The paradox of the derivative | Chapter 2, Essence of calculus (3Blue1Brown, YouTube)

JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

Wzór warty zapamiętania:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

(wzór ten działa również dla ułamkowych i ujemnych wartości n)

- **Przykład 4.** Funkcja potęgowa $f(x) = x^n$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \cdots}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \cdots$$

$$(x+\Delta x)^n = \underbrace{(x+\Delta x)\cdot(x+\Delta x)\cdot(x+\Delta x)\cdot\ldots\cdot(x+\Delta x)}_{n} =$$

$$= 1\ x^n + n\ x^{n-1}\Delta x + \quad x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n =$$

JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

Wzór bardzo warty zapamiętania:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- **Przykład 5.** Funkcja wykładnicza $f(x) = e^x$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x$$

$\Delta x = 1$	$\frac{e^{1}-1}{1} \approx 1.718282$
$\Delta x = 0.1$	$\frac{e^{0.1}-1}{1} \approx 1.051709$
$\Delta x = 0.01$	$\frac{e^{0.01}-1}{0.01} \approx 1.005017$
$\Delta x = 0.001$	$\frac{e^{0.001}-1}{0.001} \approx 1.0005$
$\Delta x = 0.0001$	$\frac{e^{0.0001}-1}{0.0001} \approx 1.00005$
$\Delta x = 10^{-10}$	$\frac{e^{10^{-10}}-1}{10^{-10}} \approx 1.00000000005$

JAK OBLICZYĆ POCHODNĄ?

Wzór bardzo warty zapamiętania:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- **Przykład 5.** Funkcja wykładnicza $f(x) = e^x$

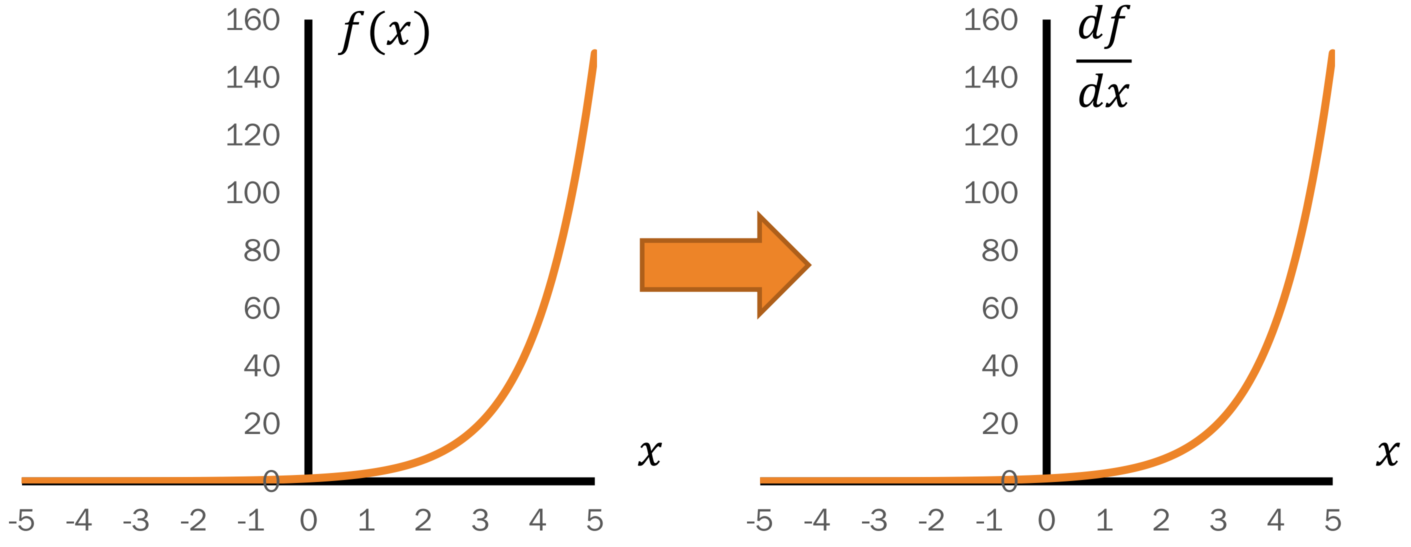
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x$$



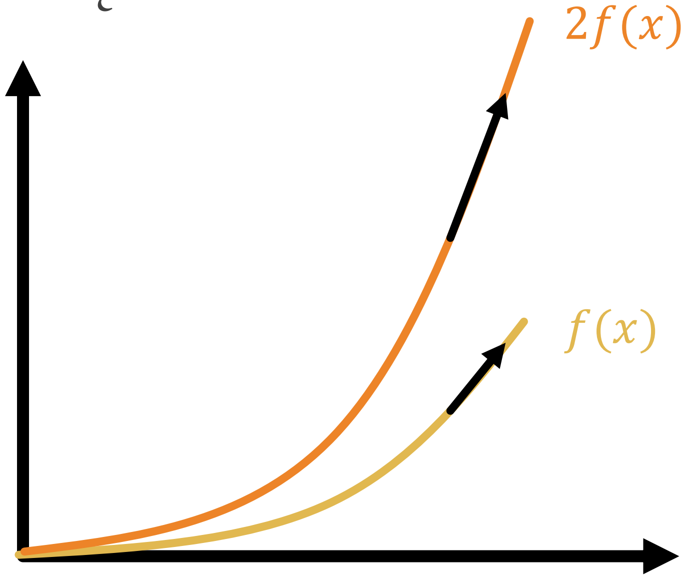
Ważna ciekawostka

$f(x) = e^x$ (i jej wielokrotności) to jedyna funkcja, która jest równa własnej pochodnej, tzn.

$$\frac{df}{dx} = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA FUNKCJI PRZEMNOŻONEJ PRZEZ STAŁĄ



- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = 5x^3$ lub $g(x) = -3e^x$?
- Rozważmy pochodną funkcji $af(x)$, gdzie a to jest stałą, a $f(x)$ dowolną funkcją.
- Wówczas:

$$\frac{d}{dx}\big(af(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{af(x+\Delta x) - af(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= a\frac{df}{dx}$$

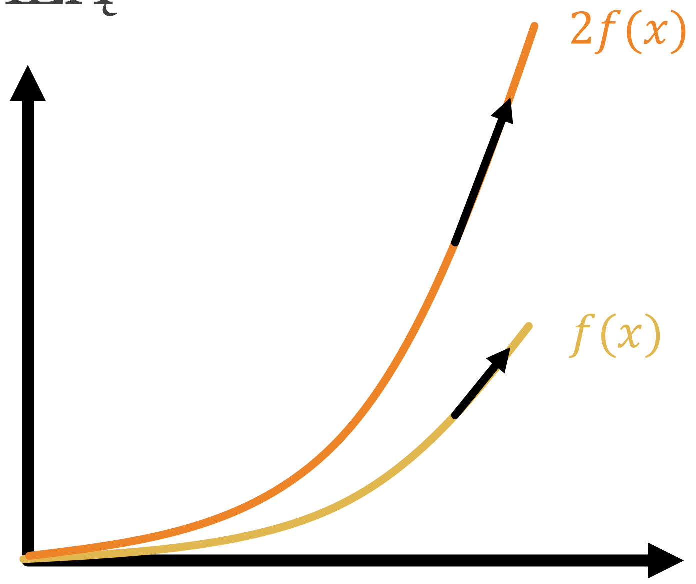
$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA FUNKCJI PRZEMNOŻONEJ PRZEZ STAŁĄ

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = 5x^3$ lub $g(x) = -3e^x$?

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^2)$$

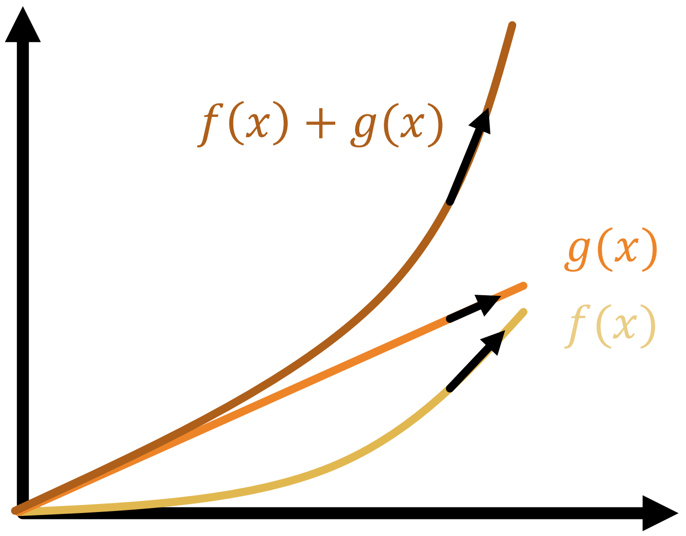
$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(-3e^x)$$



$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA SUMY DWÓCH FUNKCJI

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = x + 2e^x$?
- Rozważmy pochodną funkcji $f(x) + g(x)$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ to dowolne funkcje.
- Wówczas:



$$\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

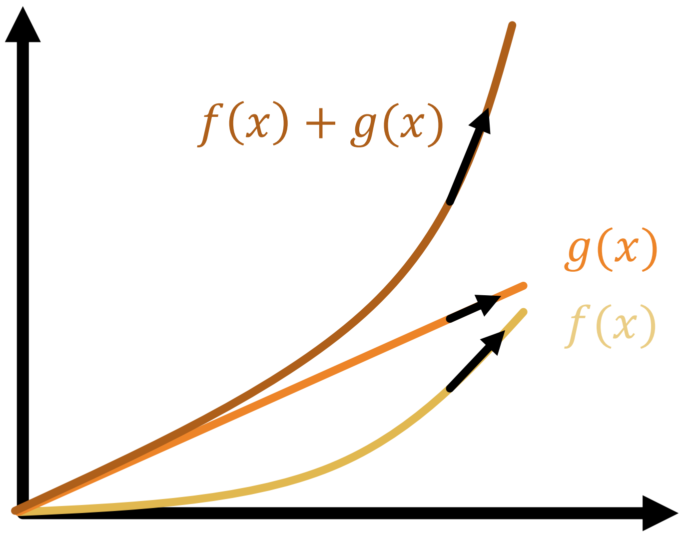
$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA SUMY DWÓCH FUNKCJI

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = x + 2e^x$?

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2e^x)$$



$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA ILOCZYNU DWÓCH FUNKCJI

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = x^2 e^x$?
- Rozważmy pochodną funkcji $f(x)g(x)$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ to dowolne funkcje. Wówczas:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x)} + \boxed{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}} + \boxed{g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA ILOCZYNU DWÓCH FUNKCJI

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną $f(x) = x^2 e^x$?

$$\frac{df}{dx} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$= x^2\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x^2)$$

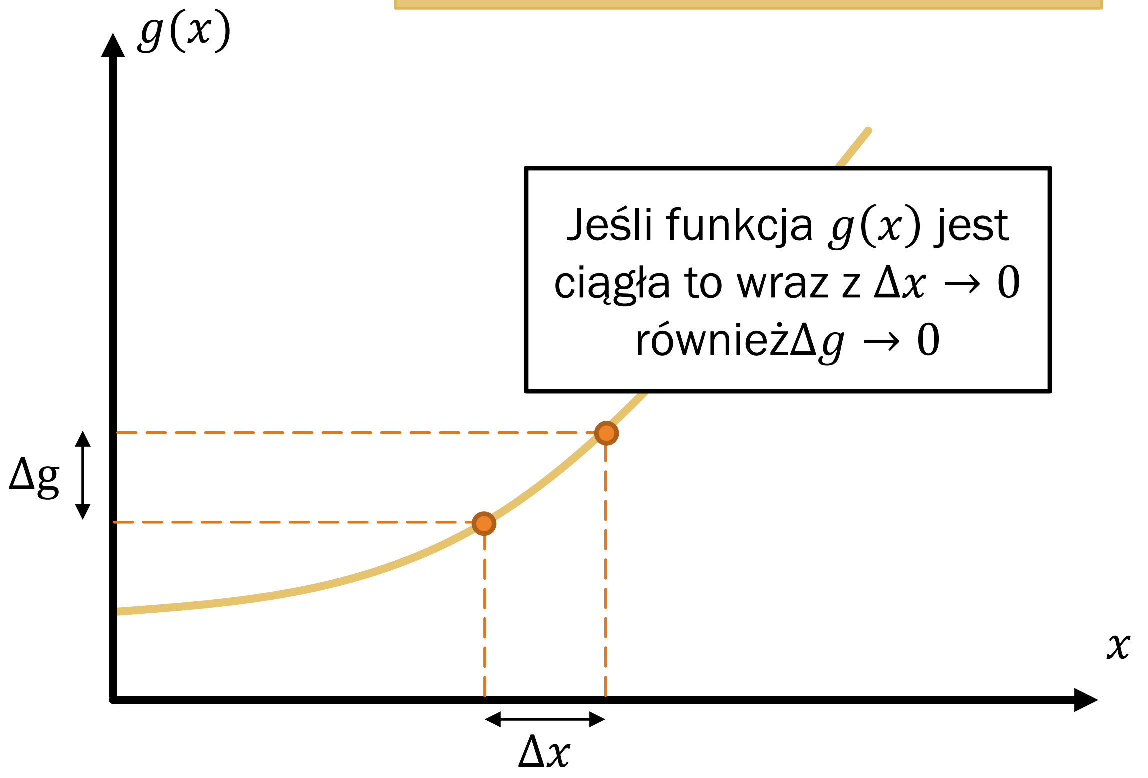
$$= x^2 e^x + 2xe^x$$

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną e^{-x^2}?
- Możemy ją zapisać jako: $f\big(g(x)\big) = e^{g(x)}$, gdzie $g(x) = -x^2$
- Rozważmy pochodną funkcji $f\big(g(x)\big)$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ to dowolne funkcje. Wówczas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\\ &= \lim_{\color{red}{\Delta x\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}\\ &= \lim_{\color{red}{\Delta g\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}\end{aligned}$$



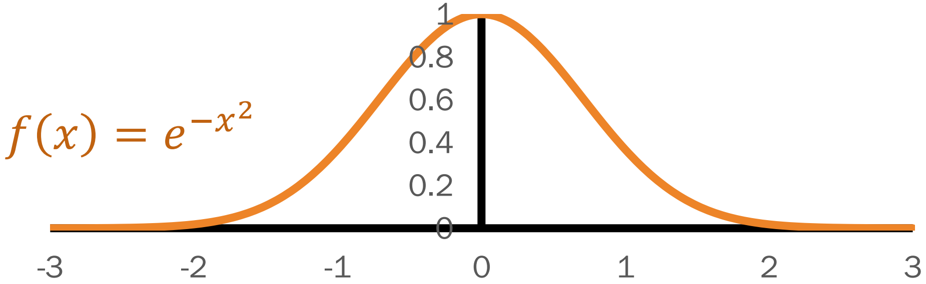
$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

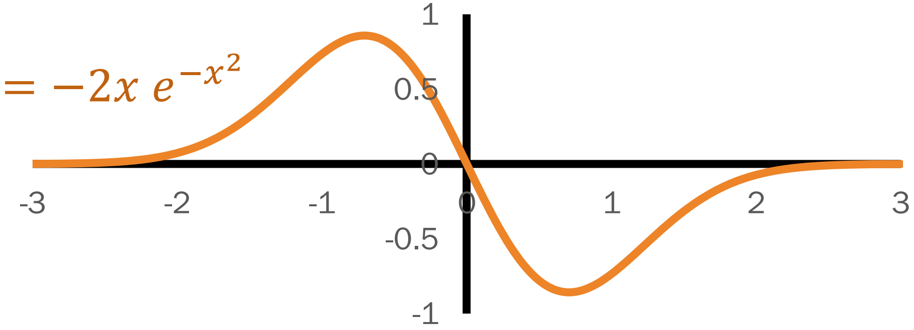
- A co jeśli chcielibyśmy policzyć pochodną e^{-x^2}?
- Możemy ją zapisać jako: $f\big(g(x)\big) = e^{g(x)}$, gdzie $g(x) = -x^2$

$$\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx} = e^{g(x)}\cdot(-2x) = -2x\,e^{-x^2}$$

$f(x) = e^{-x^2}$



$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$



JESZCZE JEDEN PRZYKŁAD

Krok 4. Pochodna $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{5x^2}}$$

Krok 3. Pochodna $w(x) = 1 + \mathrm{e}^{5x^2}$

Krok 2. Pochodna $v(x) = \mathrm{e}^{5x^2}$

Krok 1. Pochodna $u(x) = 5x^2$

- Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{1+e^{5x^2}}$

1. $\frac{du}{dx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(5x^2) = 10x.$
2. $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{5x^2}\right) = \frac{d}{du}(e^u) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(5x^2) = 10xe^u = 10xe^{5x^2}$
3. $\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + e^{5x^2}\right) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(e^{5x^2}\right) = 10xe^{5x^2}$
4. $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dw}(w^{-1}) \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{1}{w^2} \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{1}{w^2} \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{10xe^{5x^2}}{\left(1+e^{5x^2}\right)^2}$

JESZCZE JEDEN PRZYKŁAD

- Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{1+e^{5x^2}}$

1. $\frac{du}{dx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(5x^2) = 10x.$
2. $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{5x^2}\right) = \frac{d}{du}(e^u) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(5x^2) = 10xe^u = 10xe^{5x^2}$
3. $\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + e^{5x^2}\right) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(e^{5x^2}\right) = 10xe^{5x^2}$
4. $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dw}(w^{-1}) \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{1}{w^2} \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{1}{w^2} \cdot 10xe^{5x^2} = -\frac{10xe^{5x^2}}{\left(1+e^{5x^2}\right)^2}$

PODSUMOWANIE WYKŁADU

- Zaczęliśmy od wyprowadzenie wzorów na pochodną
  - Funkcji potęgowej $f(x) = x^n$ $\qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
  - Funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$ $\qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$$f(x) = \frac{x^4 - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 5}}}{1 + e^{5x^2}}$$

Źródło: www.houstonpettalk.com

- Wiemy też jak obliczać bardziej złożone pochodne, w tym:
  - Pochodną funkcji pomnożonej przez stałą $\qquad \frac{d}{dx}\left(af(x)\right) = a\frac{df(x)}{dx}$
  - Pochodną sumy dwóch funkcji $\qquad \frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
  - Pochodna iloczynu dwóch funkcji $\qquad \frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = g(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$
  - Pochodną funkcji złożonej $\qquad \frac{d}{dx}\left(f\left(g(x)\right)\right) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$