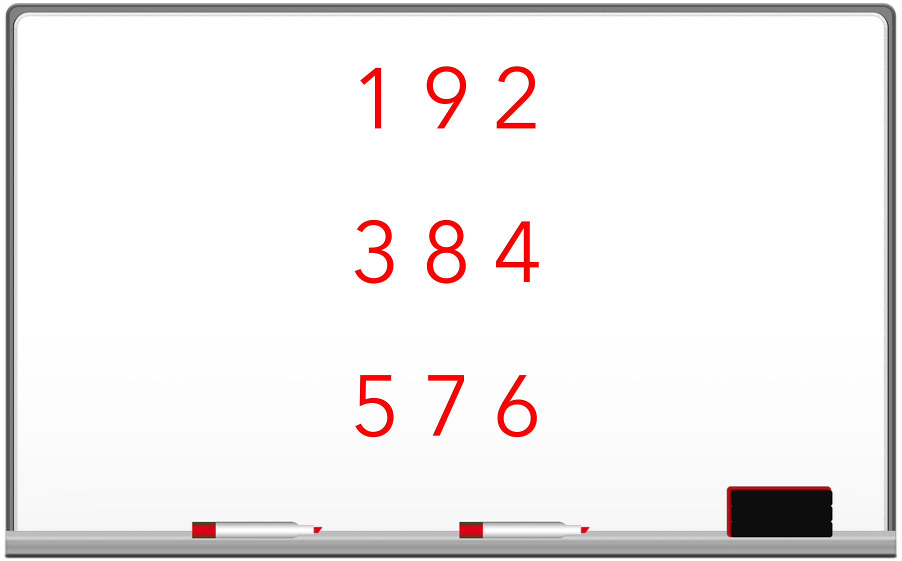
Zagadka na rozgrzewkę

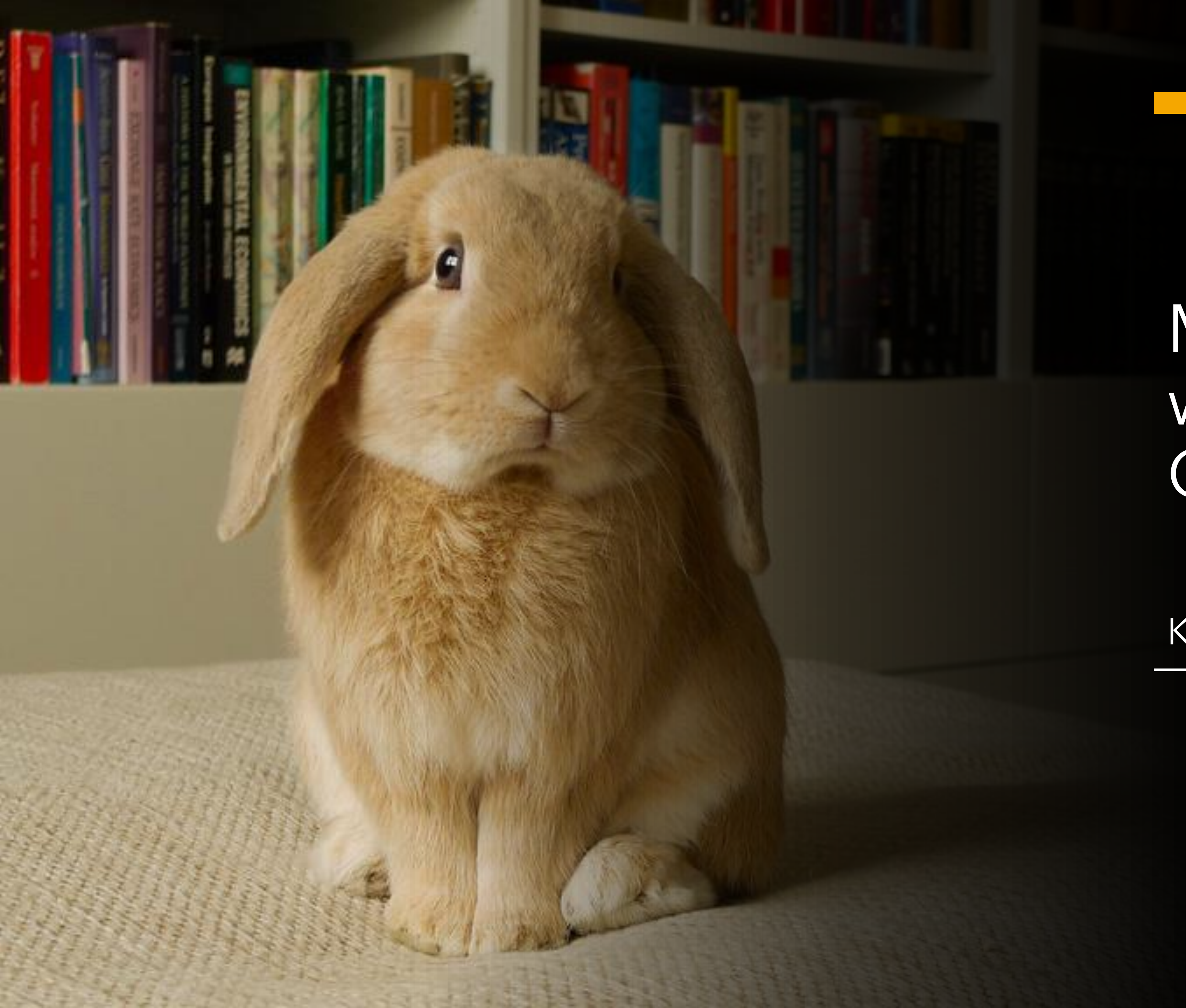
Następujące trzy liczby trzycyfrowe zawierają wszystkie cyfry od 1 do 9.

Ponadto druga liczba jest dwukrotnie większa od pierwszej liczby, a trzecia liczba jest trzykrotnie większa od pierwszej.

Istnieją trzy inne trójki liczb spełniające powyższe warunki. Czy potrafisz je odnaleźć?



Wykład wkrótce się rozpocznie.

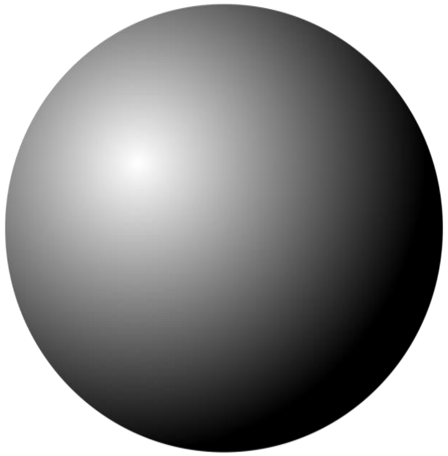


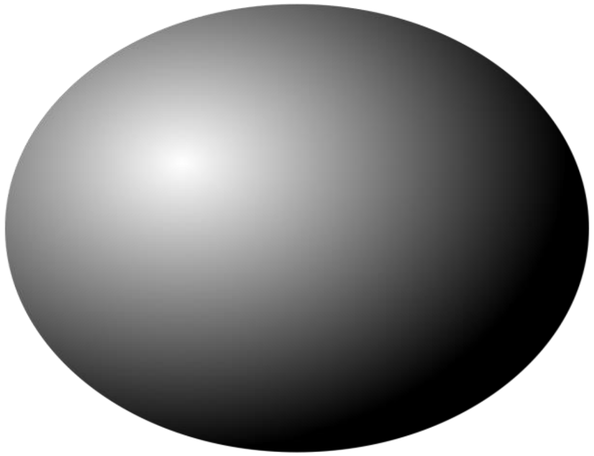
Modelowanie wzrostu populacji Część 1.

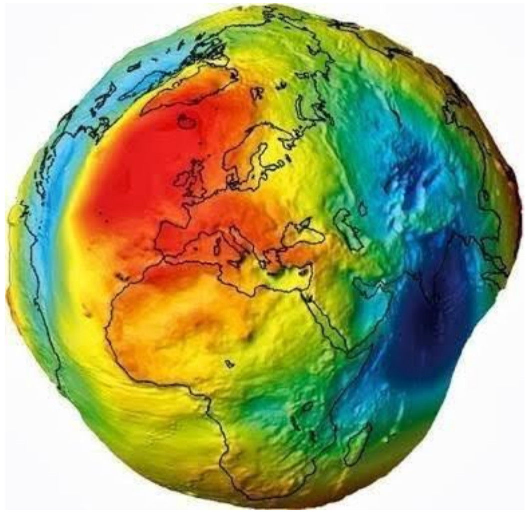
Króliki i równania różniczkowe

Jak obliczyć objętość Ziemi?

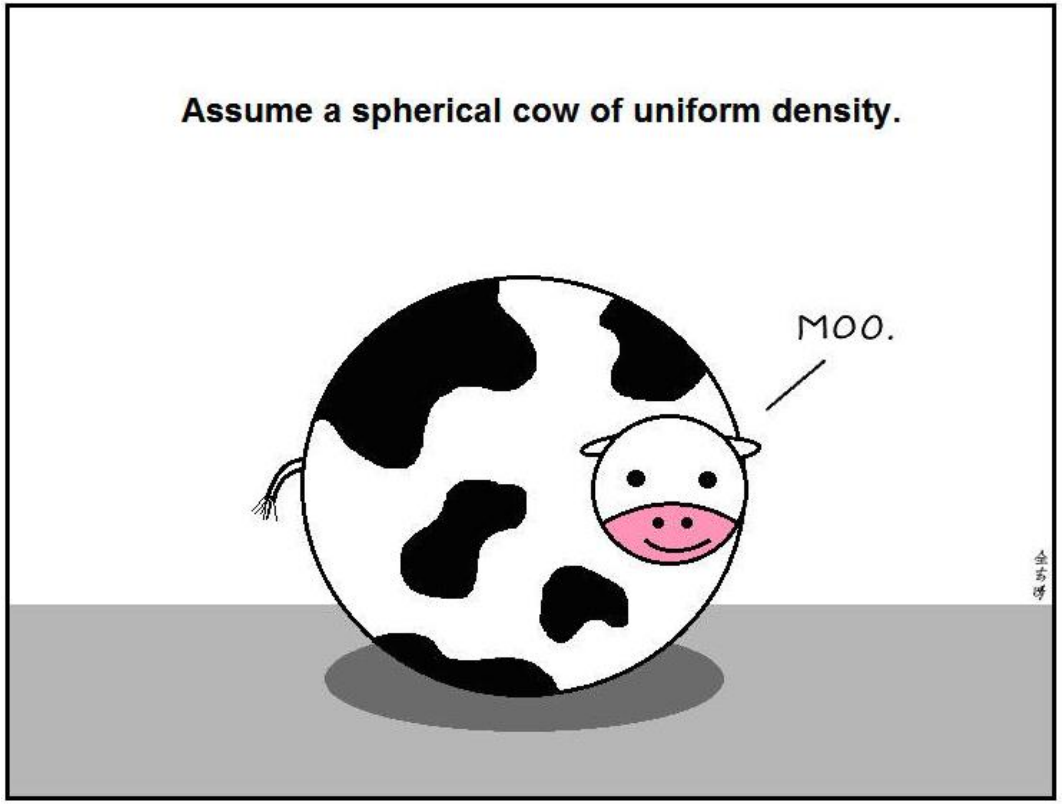
Czym jest “model matematyczny”?



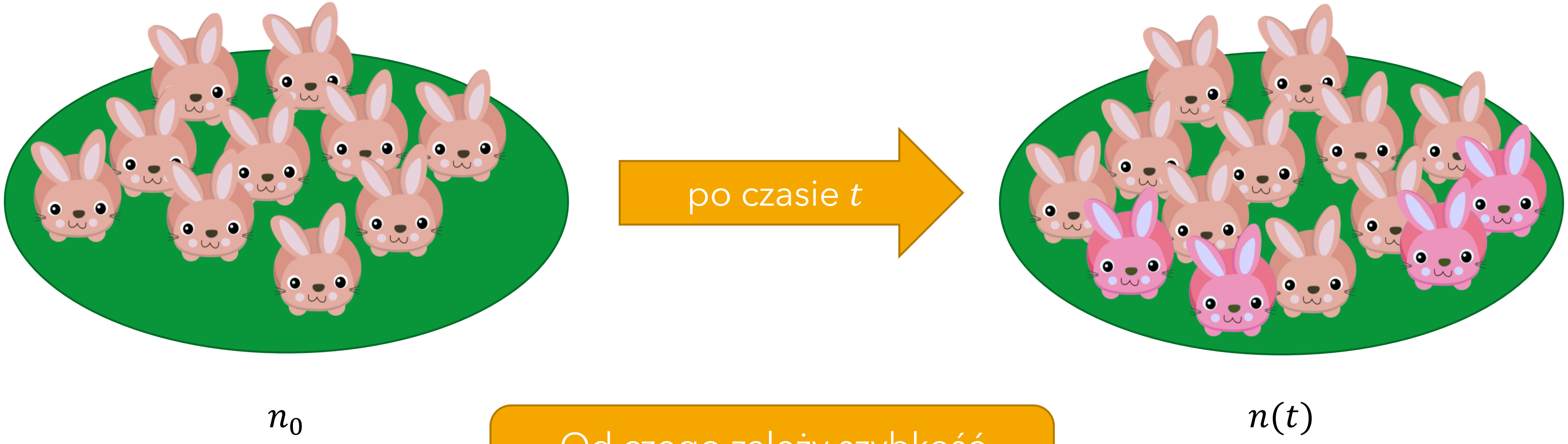




Czym jest "model matematyczny"?



Jak przewidzieć wzrost populacji królików?



Od czego zależy szybkość wzrostu populacji królików?

Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

3. Obecność drapieżników

Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

3. Obecność drapieżników

Model wzrostu populacji

- Przyjmijmy, że szybkość z jaką zwiększa się populacja, królików jest proporcjonalna do obecnej wielkości populacji.

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n$$

Szybkość wzrostu populacji

Stała określająca szybkość rozmnażania się królików

Obecny rozmiar populacji

- Uzyskaliśmy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja $n(t)$.

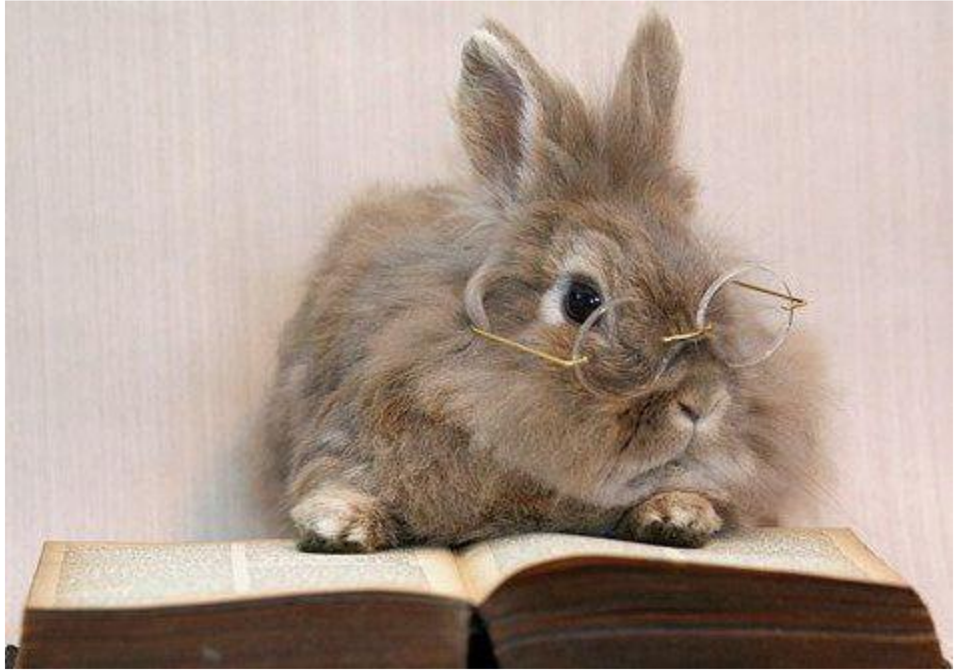
Równanie różniczkowe

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n$$

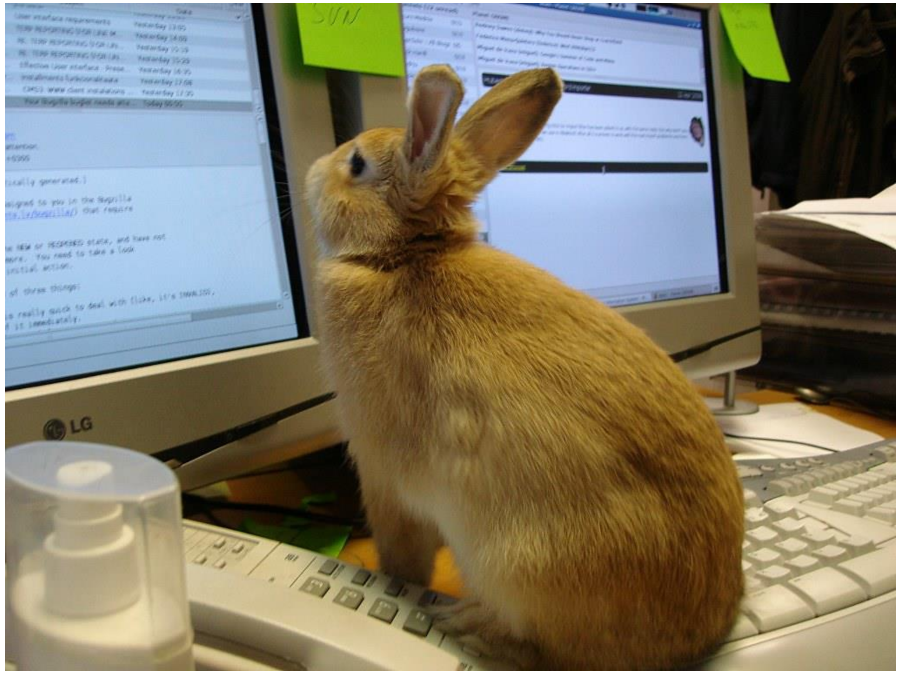
- Równanie, które określa zależność pomiędzy nieznaną funkcją a jej pochodnymi nazywamy **równaniami różniczkowymi**.

- Istnieją różne sposoby rozwiązywania takich równań, zarówno **analityczne** („na papierze”) jak i **numeryczne** (z wykorzystaniem komputera).

Rozwiązywanie równań różniczkowych

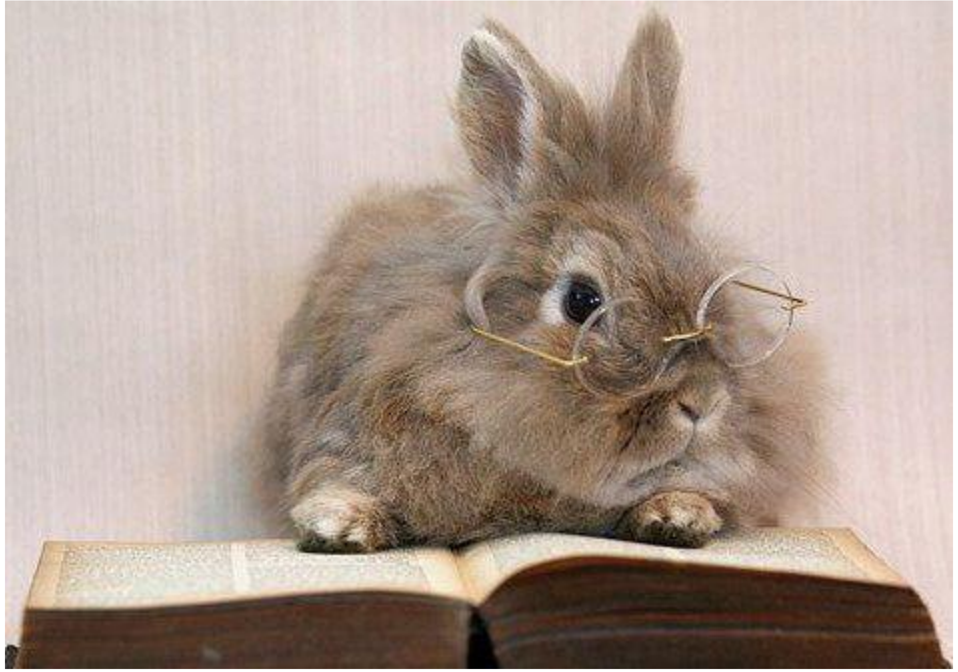


Rozwiązanie analityczne

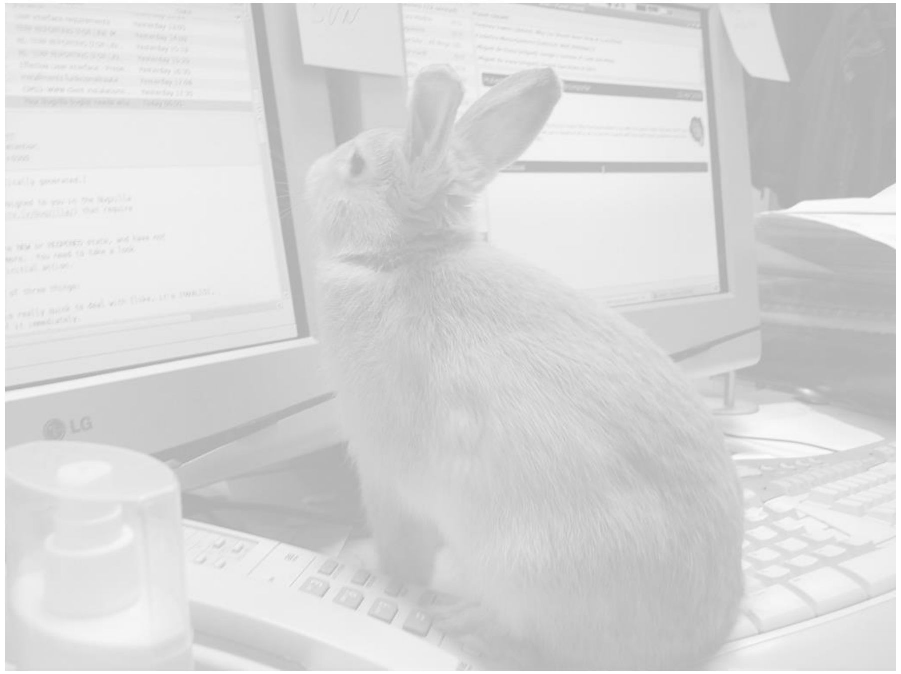


Rozwiązanie numeryczne

Rozwiązywanie równań różniczkowych



Rozwiązanie analityczne



Rozwiązanie numeryczne

Rozwiązanie analityczne (1)

- Często stosowaną metodą jest odgadnięcie (a następnie sprawdzenie) możliwego rozwiązania.
- Spróbujmy sprawdzić funkcję wykładniczą:

$$n(t) = e^{\lambda t}, \text{ gdzie } \lambda \text{ to nieznany parametr}$$

- Obie strony równania są identyczne, gdy $\lambda = k$.
- Podsumowując, nasze rozwiązanie to $n(t) = e^{kt}$

$$\boxed{\frac{dn}{dt}} = \boxed{k \cdot n}$$

$$\frac{dn}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \qquad k \cdot n = k e^{\lambda t}$$

Rozwiązanie analityczne (2)

$$\boxed{\frac{dn}{dt}} = \boxed{k \cdot n}$$

$$\frac{dn}{dt} = 2ke^{kt} \qquad k \cdot n = 2ke^{kt}$$

$$2022 \cdot ke^{kt} \qquad 2022 \cdot ke^{kt}$$

$$Cke^{kt} \qquad Cke^{kt}$$

- Czy $n(t) = e^{kt}$ jest jedynym rozwiązaniem?
- Nie. Kontrprzykład: $n = 2 \cdot e^{kt}$

  lub $n = 2022 \cdot e^{kt}$
- W ogólności $n(t) = Ce^{kt}$ jest rozwiązaniem równania dla <u>dowolnej</u> stałej C.

Rozwiązanie ogólne i szczególne

- **Rozwiązanie ogólne**

$$n(t) = Ce^{kt}$$

n_0 $\qquad$ $n(t)$

- Przypuśćmy, że początkowa populacja naszych królików wynosi n_0. Jednocześnie:

$$n(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

- A zatem $C = n_0$.
- Naszym **rozwiązaniem szczególnym** jest: $n(t) = n_0 e^{kt}$

Podsumowanie naszego rozwiązania

- **Rozwiązanie ogólne**

$$n(t) = Ce^{kt}$$

gdzie C jest dowolną stałą

Warunek początkowy
$n(0) = n_0$

- **Rozwiązanie szczególne**

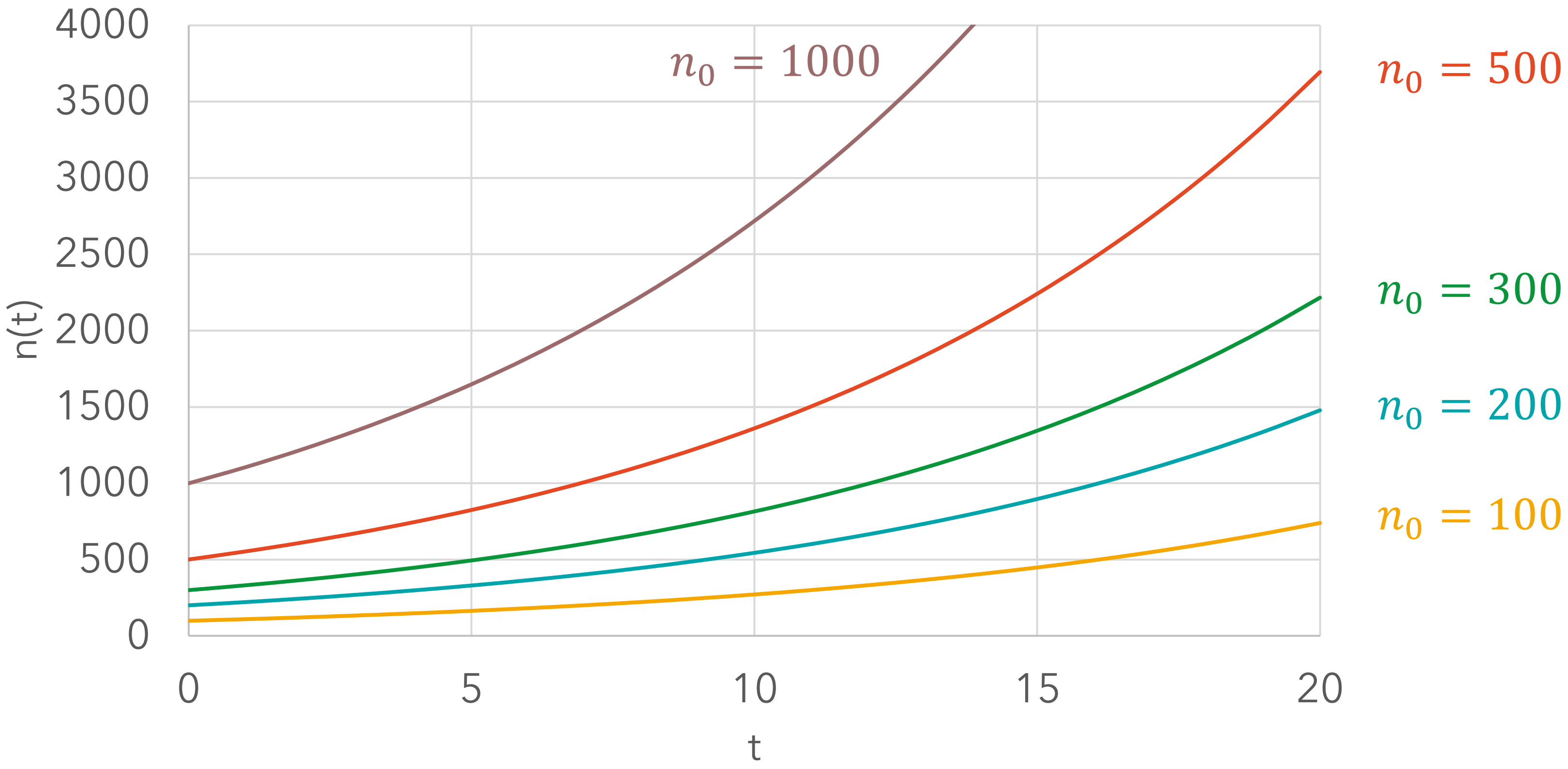
$$n(t) = n_0 e^{kt}$$

gdzie n_0 to początkowa populacja królików

Ważny fakt: Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego, w którym występuje szukana funkcja $f(x)$ i jej pierwsza pochodna $\frac{df}{dx}$ będzie zawierać jedną nieznaną stałą. Można znaleźć jej wartość wykorzystując warunek początkowy.

Wykres rozwiązania

$$n(t) = n_0 e^{kt}$$



Przykład na liczbach

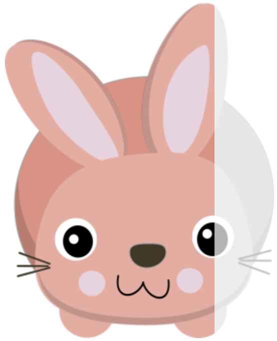
$$n(t) = n_0 e^{kt}$$

Przypuśćmy, że mamy populację $n_0 = 100$ królików, dla których współczynnik tempa wzrostu wynosi $k = 0.1 \frac{1}{d}$

Pytanie 1.

Ile królików będziemy mieli po 20 dniach?

$$n(t) = n_0 e^{kt} = 100 \cdot e^{0.1 \cdot 20} = 100 \cdot e^2 \approx 738.9$$



0.9 królika?

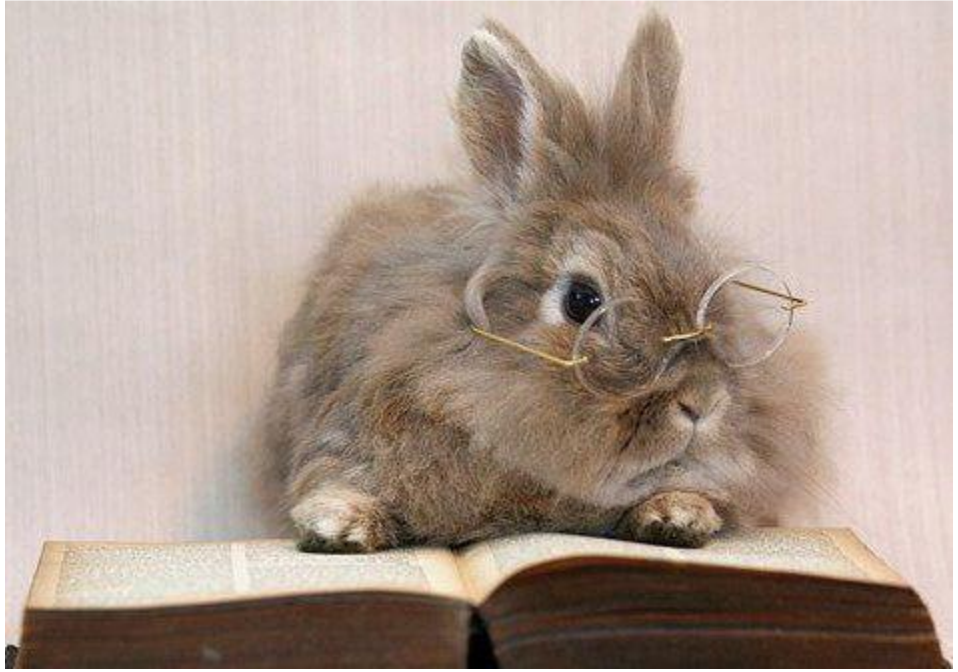
Pytanie 2.

Po jakim czasie królików będzie 10000?

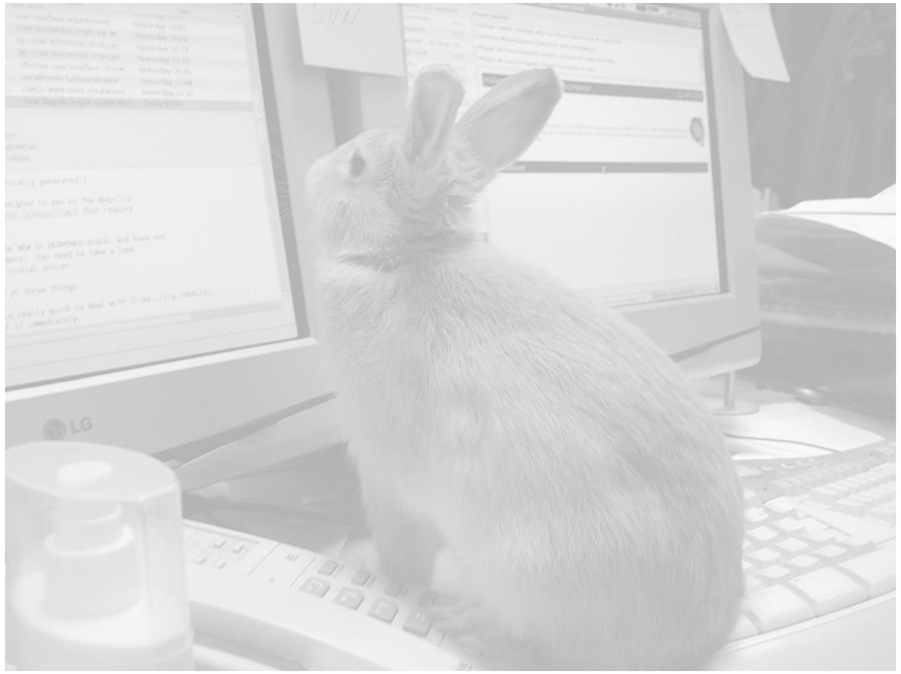
$$n = n_0 e^{kt}$$

$$t = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych



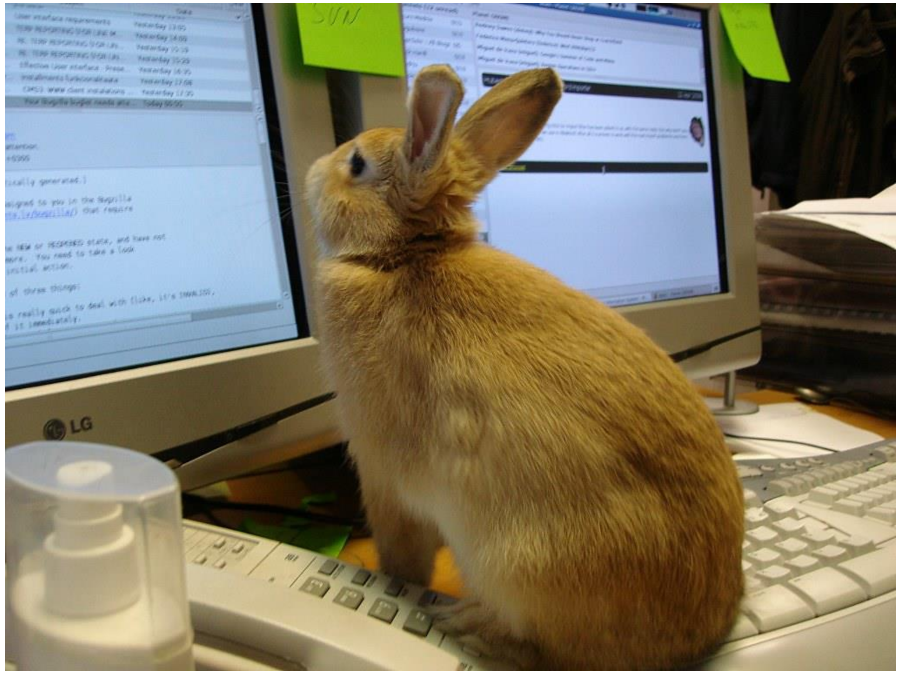
Rozwiązanie analityczne



Rozwiązanie numeryczne

Rozwiązywanie równań różniczkowych

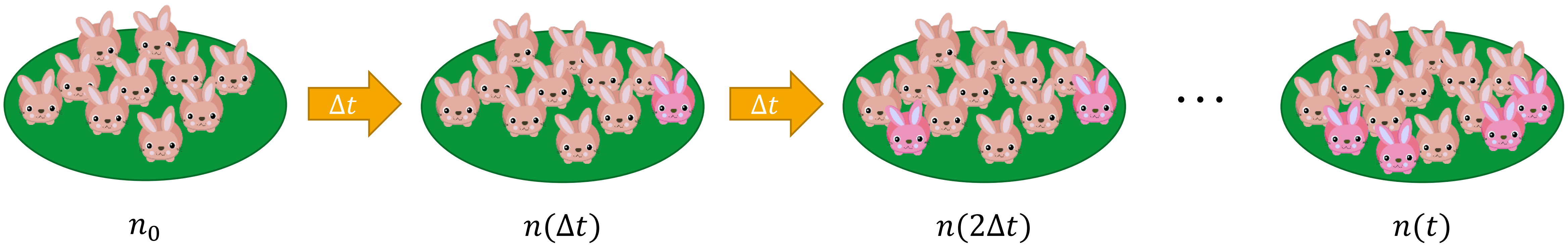
Rozwiązanie analityczne



Rozwiązanie numeryczne

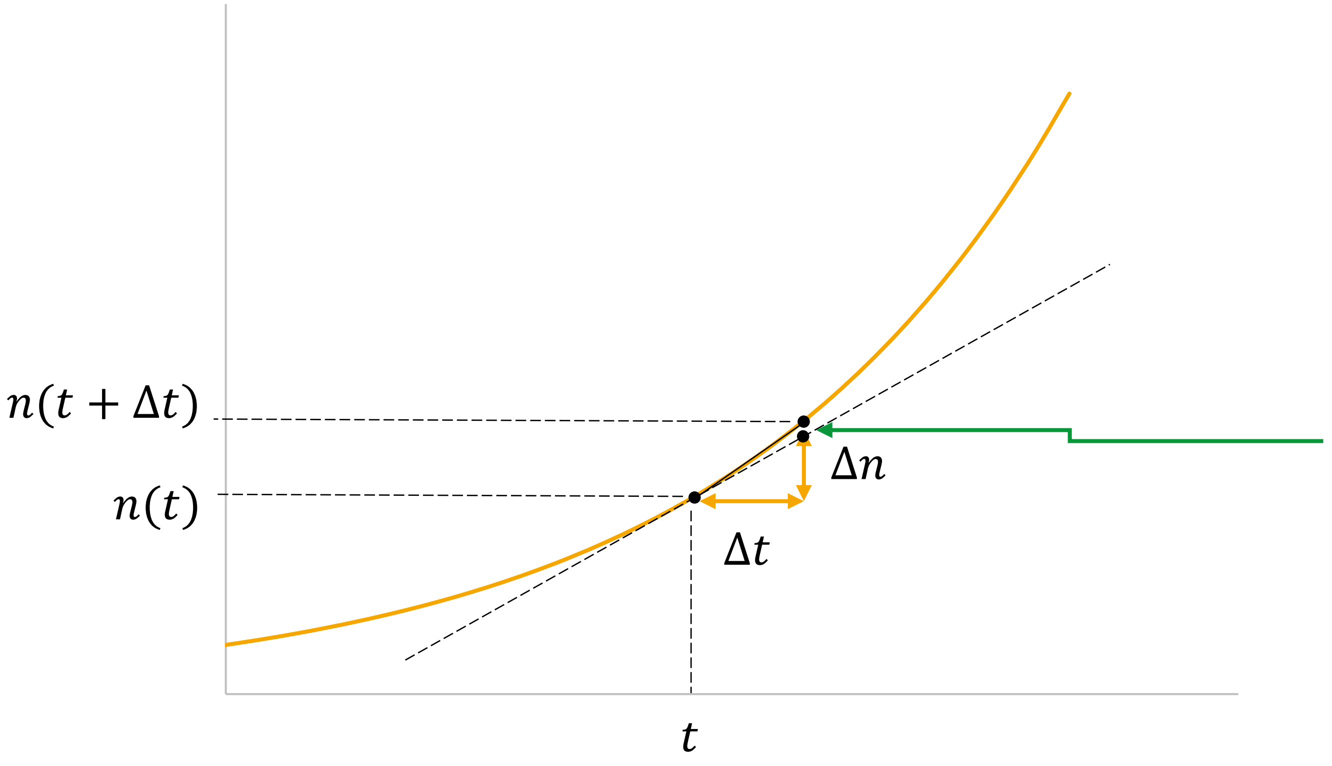
Podejście numeryczne

W podejściu numerycznym dzielimy czas na wiele krótkich interwałów (**kroków czasowych**):



Przybliżenie pochodnej

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n$$

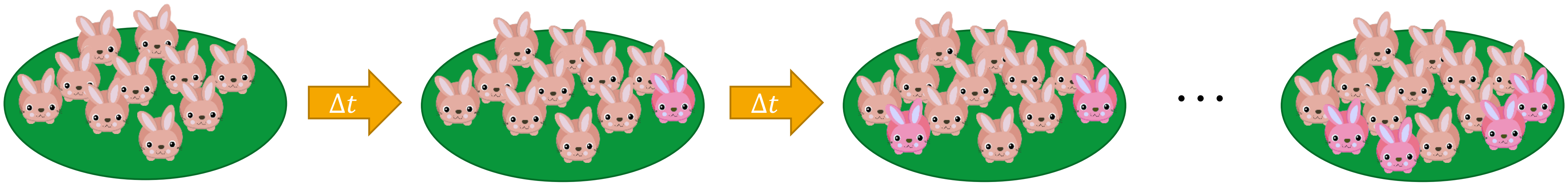


$$\frac{dn}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} \approx kn$$ dla małego Δt

$$n(t+\Delta t) \approx n(t) + kn\Delta t$$

Numeryczne obliczanie populacji królików



n_0 $\quad$ $n_1 = n(\Delta t)$ $\quad$ $n_2 = n(2\Delta t)$ $\quad$ $n_i = n(i\Delta t)$

$$n(t + \Delta t) \approx n(t) + kn\Delta t$$

$$n_1 = n_0 + kn_0\Delta t$$

$$n_2 = n_1 + kn_1\Delta t$$

$$n_3 = n_2 + kn_2\Delta t$$

$$n_i = n_{i-1} + kn_{i-1}\Delta t$$

„metoda Eulera"

Przykład: obliczmy pierwszy krok

$n_0 = 100$
$k = 1$
$\Delta t = 0.1$

$n_1 = n_0 + kn_0\Delta t$

$n_2 = n_1 + kn_1\Delta t$

$n_3 = n_2 + kn_2\Delta t$

$n_i = n_{i-1} + kn_{i-1}\Delta t$

$$n_1 = n_0 + kn_0\Delta t = 100 + 1 \cdot 100 \cdot 0.1 = \boxed{110}$$

$$n_2 = n_1 + kn_1\Delta t = 110 + 1 \cdot 110 \cdot 0.1 = \boxed{121}$$

$$n_3 = n_2 + kn_2\Delta t = 121 + 1 \cdot 121 \cdot 0.1 = 133.1$$

Implementacja w Pythonie

Ustawiamy parametry symulacji

```
k = 1
n0 = 100
t_max = 10
dt = 0.1
```

Tworzymy listy na kolejne wartości t_i i n_i

```
t = [0]
n = [n0]
```

Iteracyjnie obliczamy kolejne wartości t_i i n_i

```
while t[-1] < t_max:
  t.append(t[-1] + dt)
  n.append(n[-1] + k*n[-1]*dt)
```

Rysujemy wyniki symulacji

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(t,n)
```

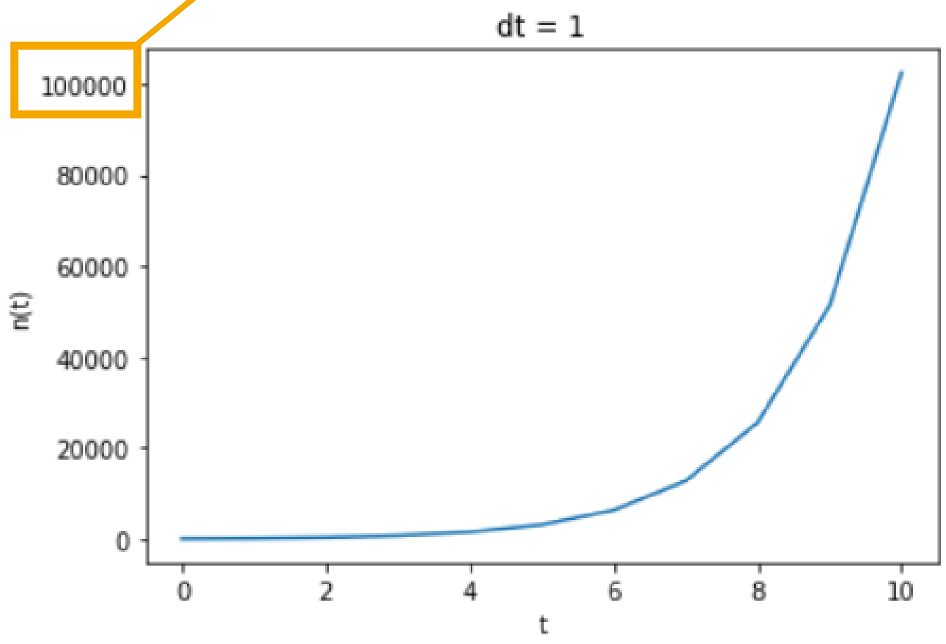
$$n_1 = n_0 + kn_0\Delta t$$

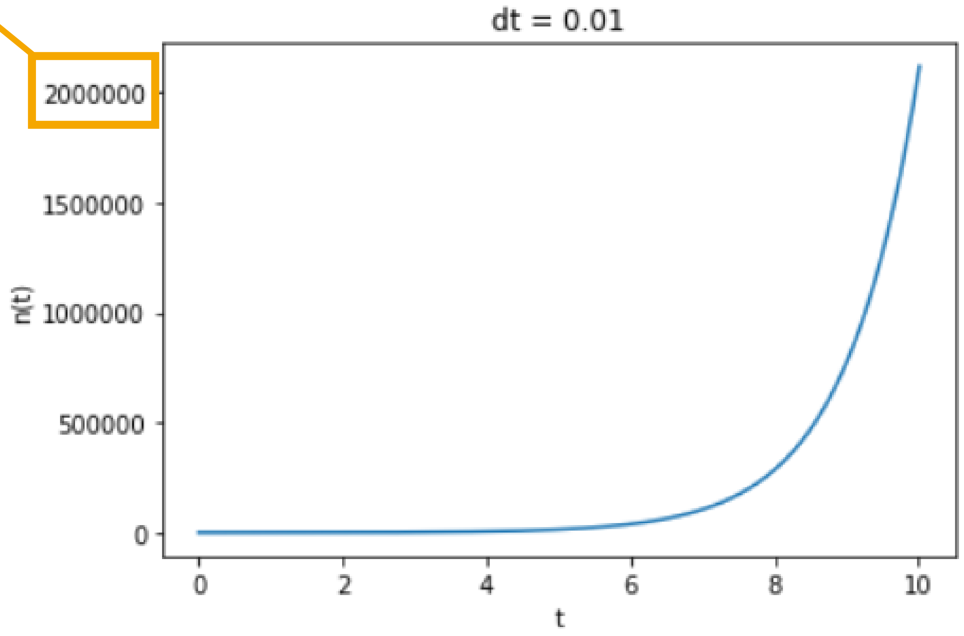
$$n_2 = n_1 + kn_1\Delta t$$

$$n_3 = n_2 + kn_2\Delta t$$

$$n_i = n_{i-1} + kn_{i-1}\Delta t$$

Wyniki symulacji





Który model jest dokładniejszy?

Układ dynamiczny

Układ dynamiczny – model matematyczny rzeczywistego zjawiska przyrody, którego ewolucja jest wyznaczona jednoznacznie przez stan początkowy; najczęściej jest opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych, zwanym **równaniem stanu**.

Źródło: *Wikipedia*, po lekkim uproszczeniu ☺

Podobne modele i symulacje wykorzystuje się w…

Podsumowanie

Modele matematyczne często wykorzystują równania różniczkowe do przewidywania różnych zjawisk (np. wzrostu populacji).

Równania różniczkowe mają rozwiązanie ogólne (z dowolną stałą) i szczególne, które znajdujemy korzystając z warunku początkowego.

Możemy je rozwiązywać analitycznie (np. odgadując rozwiązanie) lub numerycznie (np. za pomocą metody Eulera).