Zagadka na rozgrzewkę

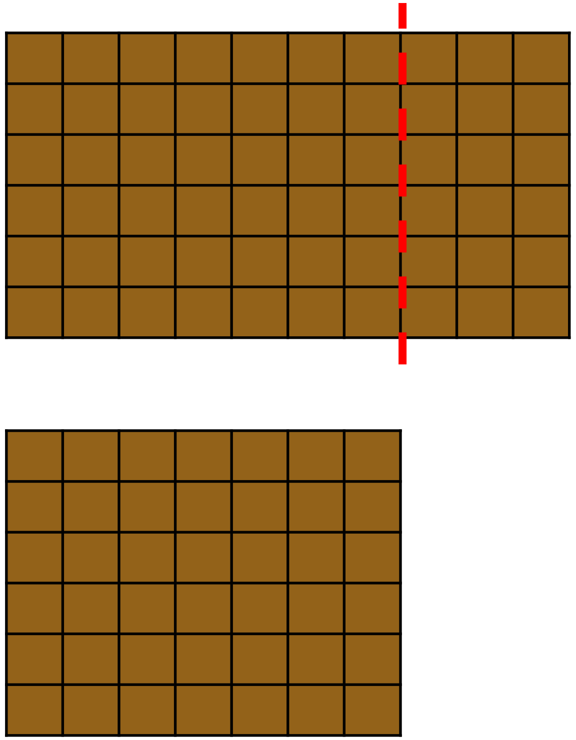
Gra w czekoladę

- Do tej dwuosobowej gry potrzebna jest tabliczka czekolady, na przykład o wielkości 6x10 kostek.
- Wykonując ruchy na zmianę gracze przełamują czekoladę wzdłuż dowolnej prostej pionowej lub poziomej przechodzącej między kostkami (czyli tak, jak się powinno łamać czekoladę), a następnie zjadają (lub chowają) jedną z otrzymanych w ten sposób części.
- Wygrywa ten gracz, który jako pierwszy odłamie pojedynczą kostkę.

W jaki sposób pierwszy gracz może wygrać niezależnie od ruchów drugiego gracza?

Wykład wkrótce się rozpocznie.

Przykładowy ruch:



Modelowanie populacji 2.

Krewni i Znajomi Królika, czyli jak zapobiec przeludnieniu

Podsumowanie ostatniego wykładu

- Wprowadziliśmy następujący model wzrostu populacji królików:

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n$$

Szybkość wzrostu populacji

Obecny rozmiar populacji

Współczynnik tempa wzrostu

- Pokazaliśmy, że rozwiązaniem równania jest funkcja wykładnicza:

$$n(t) = n_0 e^{kt}$$

Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

3. Obecność drapieżników

Jakie czynniki wybrać?

1. Obecna liczba królików

2. Ilość dostępnego pożywienia

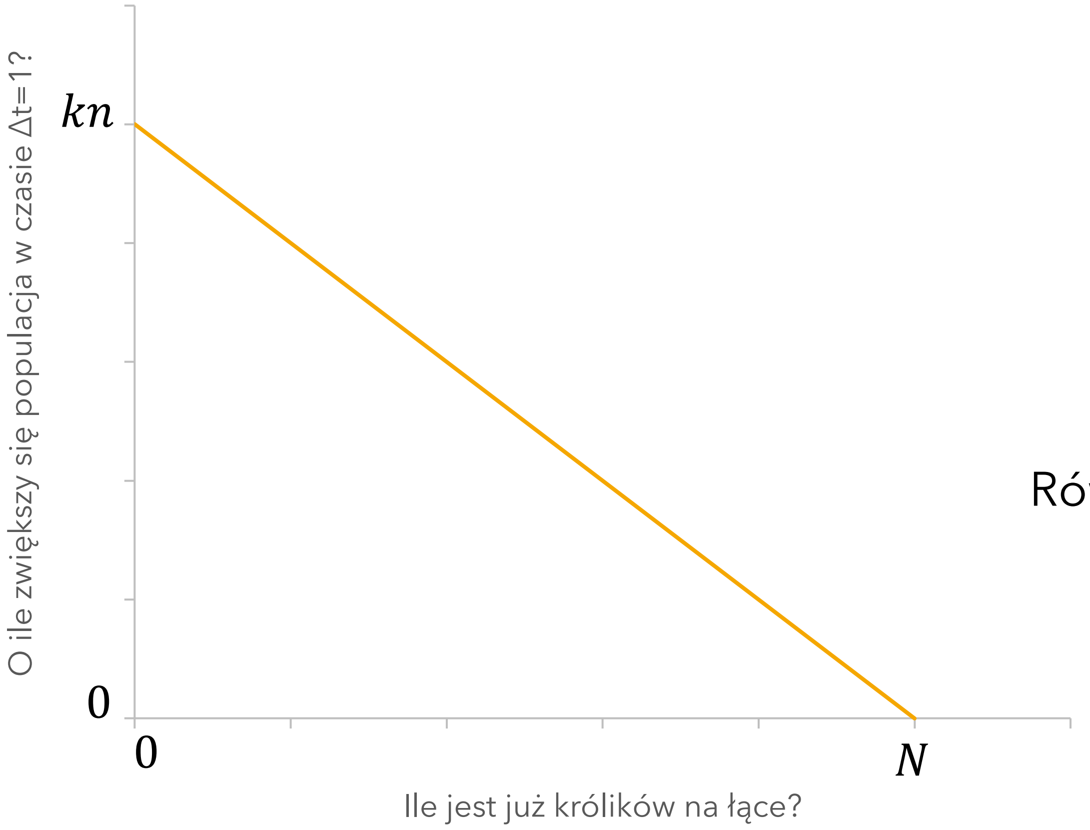
3. Obecność drapieżników

Model 2. Ograniczone zasoby środowiska

n_0

Im więcej królików tym większa śmiertelność.

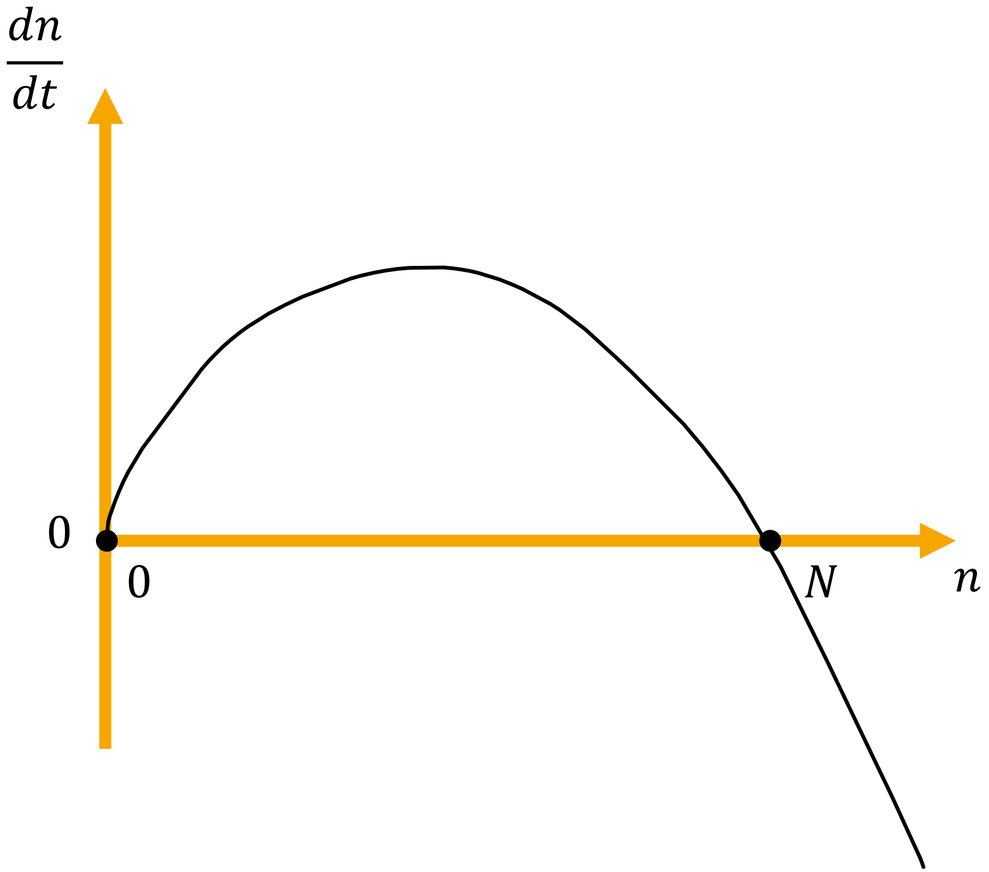
Model 2. Ograniczone zasoby środowiska



$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

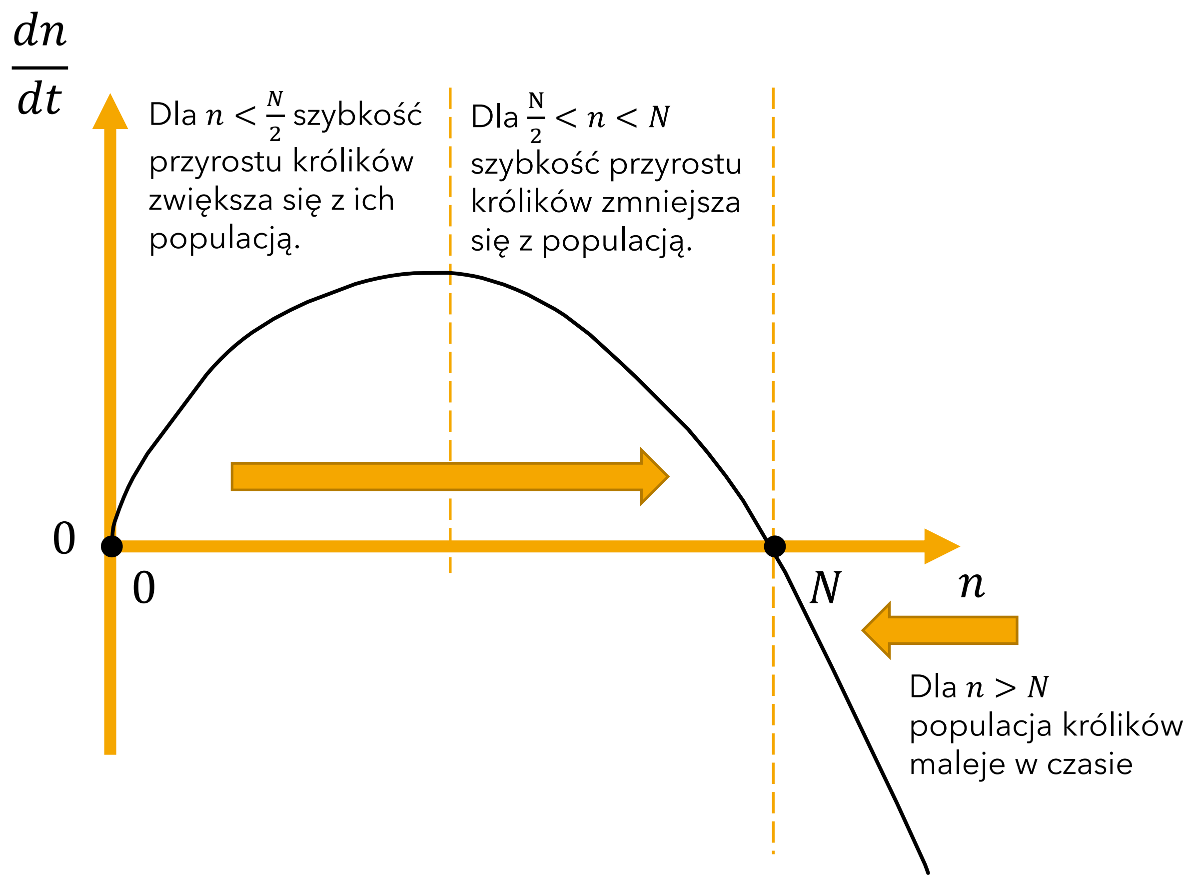
Równanie to jest nazywane "równaniem logistycznym"

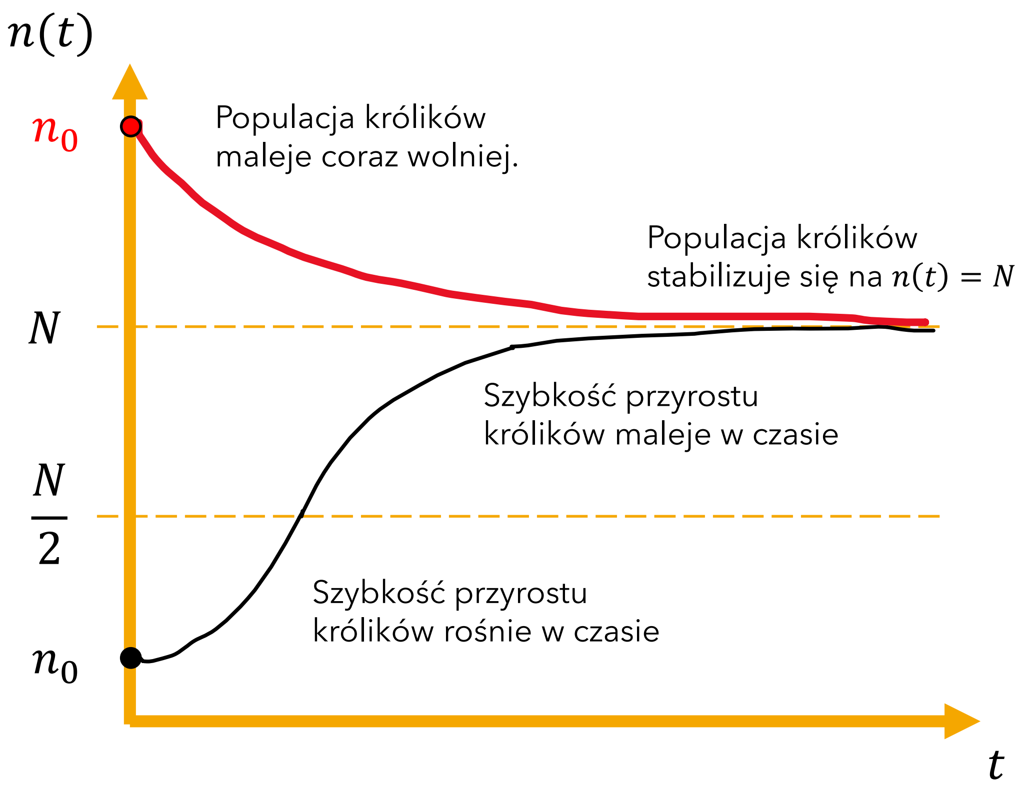
Naszkicujmy rozwiązanie



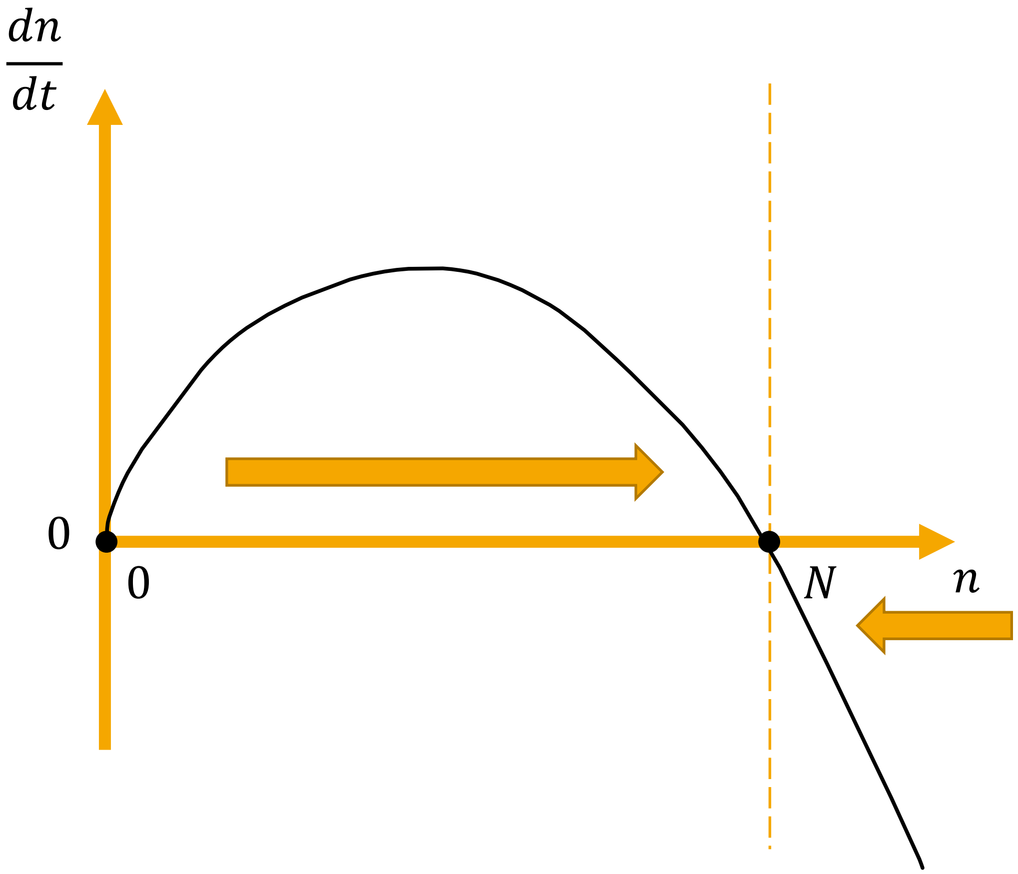
$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Narysujmy rozwiązanie



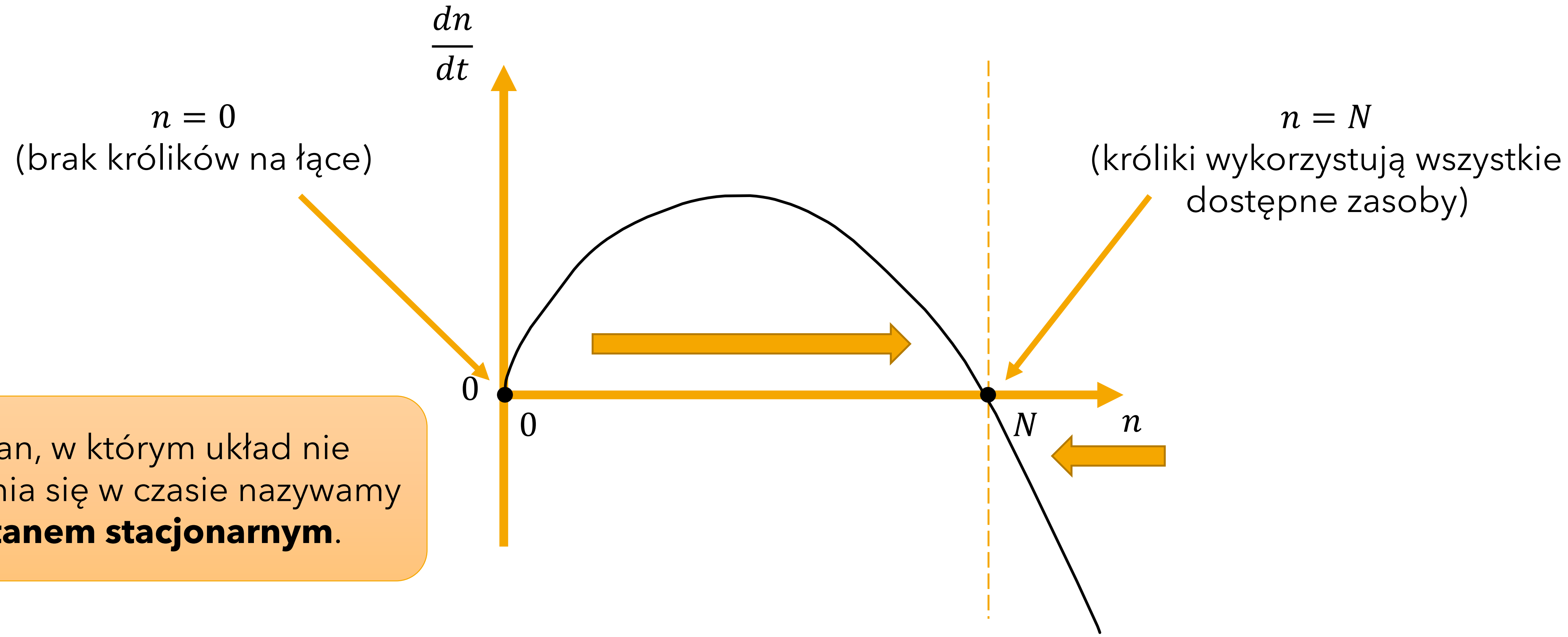


Stany stacjonarne



Stany stacjonarne

Istnieją dwa punkty, w których populacja królików nie ulega zmianie:

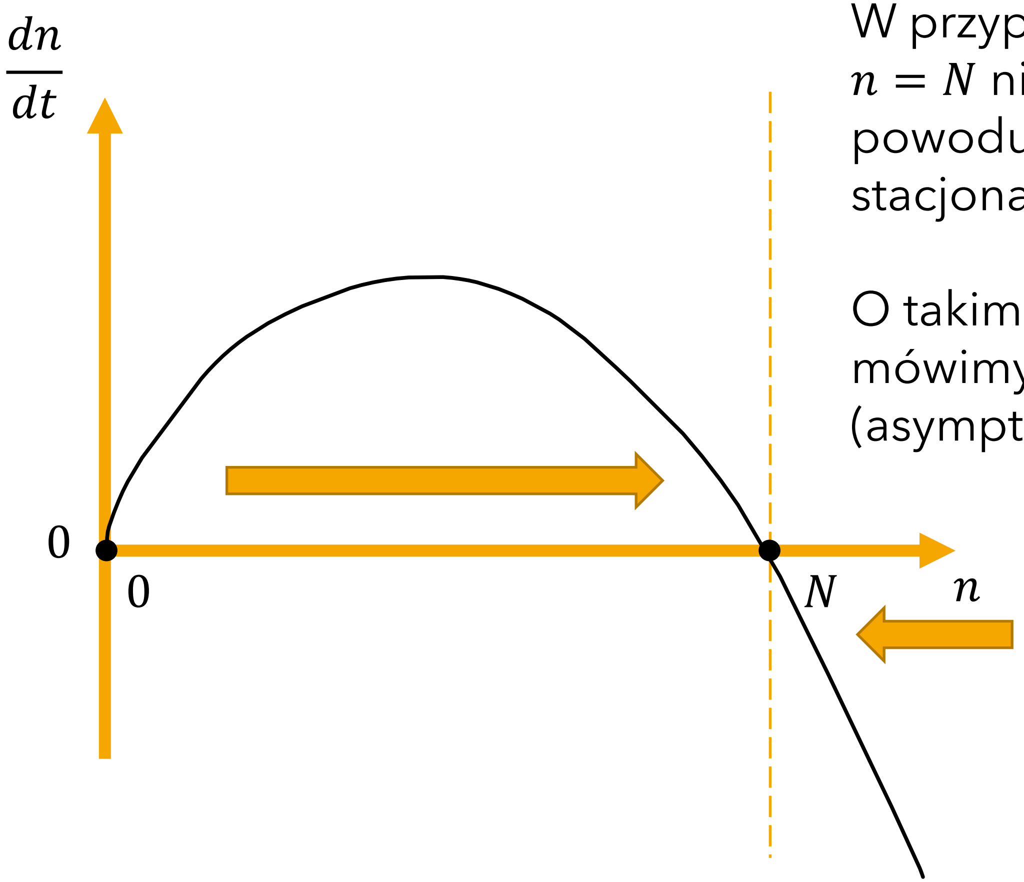


Stan, w którym układ nie zmienia się w czasie nazywamy **stanem stacjonarnym**.

Analiza stabilności

W przypadku stanu stacjonarnego $n = 0$ nawet niewielka zmiana tego stanu powoduje odejście od danego stanu stacjonarnego.

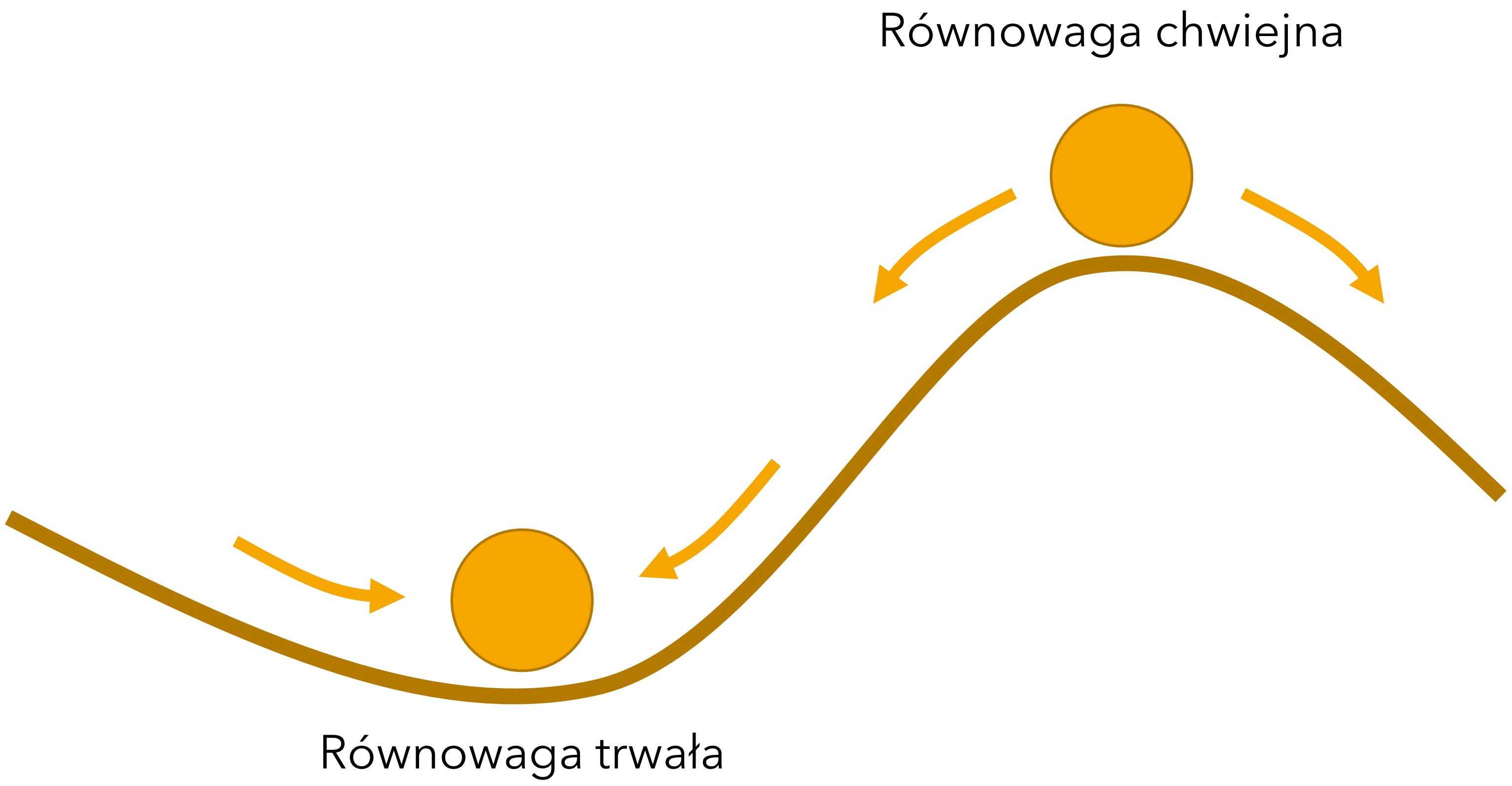
O takim stanie stacjonarnym mówimy, że jest **niestabilny**.



W przypadku stanu stacjonarnego $n = N$ niewielka zmiana tego stanu powoduje powrót układu do stanu stacjonarnego.

O takim stanie stacjonarnym mówimy, że jest lokalnie (asymptotycznie) **stabilny**.

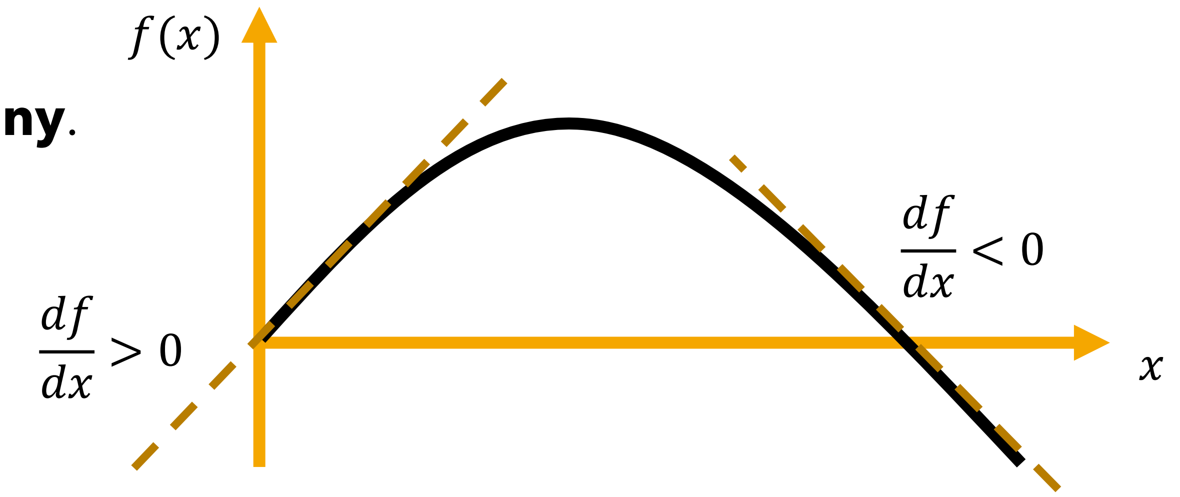
Fizyczna analogia



Podejście analityczne

Rozważmy układ dynamiczny opisany równaniem $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

- **Stany stacjonarne** znajdujemy znajdując x, dla których $f(x) = 0$
- Żeby ocenić stabilność rysujemy sprawdzamy znak $\frac{df}{dx}$ w danym stanie stacjonarnym.
- Jeśli w danym stanie stacjonarnym $\frac{df}{dx} < 0$ to jest on (lokalnie asymptotycznie) **stabilny**. Jeśli $\frac{df}{dx} > 0$ to jest on **niestabilny**.



Rozwiązanie analityczne

Ogólnym rozwiązaniem równania

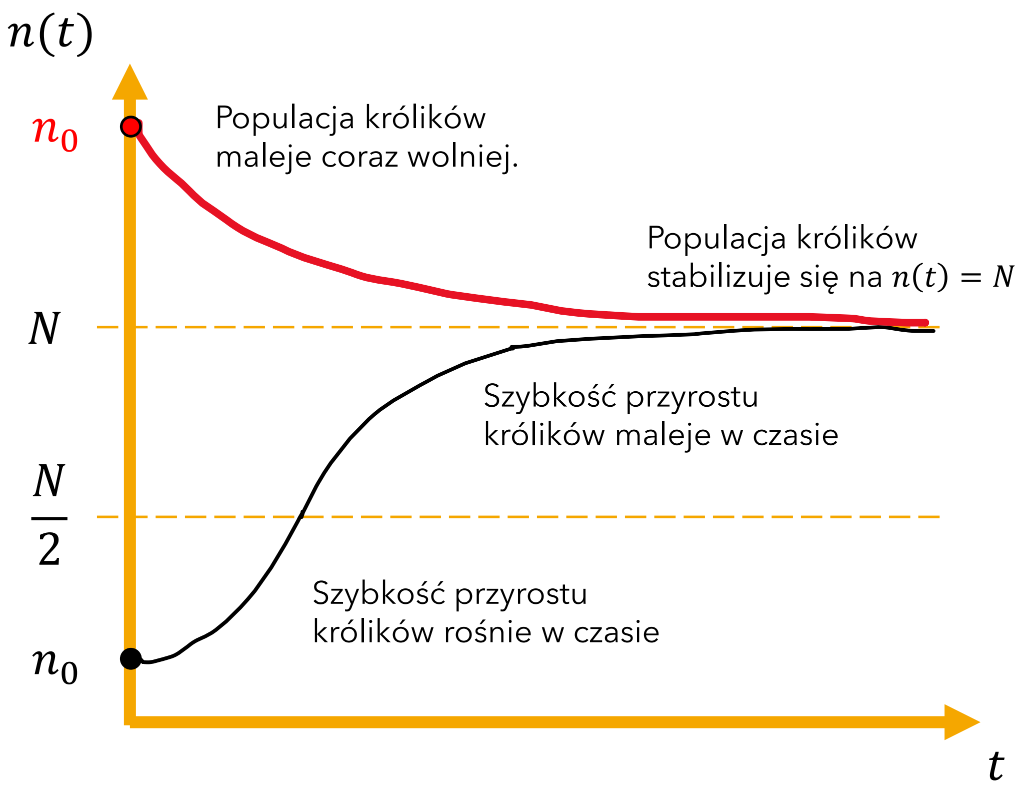
$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Jest

$$n(t) = \frac{N}{1 - \underbrace{Ce^{-kt}}}$$

Dla dużych czasów wyrażenie e^{-kt} jest bardzo małe. Wówczas $n(t) \approx N$

Można to matematycznie zapisać przy pomocy granicy, $\lim_{t \to \infty} n(t) = N$



Sprawdzamy rozwiązanie analityczne

- Ogólnym rozwiązaniem równania $\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ jest $n(t) = \frac{N}{1-Ce^{-kt}}$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{N}{1 - Ce^{-kt}}\right)$$
$$= N\frac{d}{dt}\frac{1}{f(t)}$$
$$= N \cdot \frac{df}{dt} \cdot \frac{d}{df}\frac{1}{f(t)}$$
$$= -N \cdot Cke^{-kt} \cdot \frac{1}{f(t)^2}$$
$$\boxed{= -\frac{NCke^{-kt}}{(1 - Ce^{-kt})^2}}$$

$f(t) = 1 - Ce^{-kt}$

$$k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) = k\frac{N}{1 - Ce^{-kt}}\left(1 - \frac{1}{1 - Ce^{-kt}}\right)$$
$$= k\frac{N}{1 - Ce^{-kt}}\left(\frac{1 - Ce^{-kt}}{1 - Ce^{-kt}} - \frac{1}{1 - Ce^{-kt}}\right)$$
$$= k\frac{N}{1 - Ce^{-kt}}\left(\frac{1 - Ce^{-kt} - 1}{1 - Ce^{-kt}}\right)$$
$$\boxed{= -\frac{NCke^{-kt}}{(1 - Ce^{-kt})^2}}$$

Rozwiązanie szczególne

- Ogólnym rozwiązaniem równania $\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ jest $n(t) = \frac{N}{1 - Ce^{-kt}}$
- Dla jakiego C spełniony będzie warunek początkowy $n(0) = n_0$?

$$n(0) = \frac{N}{1 - Ce^{-k \cdot 0}} = \frac{N}{1 - C} = n_0$$

$$N = n_0(1 - C)$$

$$\frac{N}{n_0} = 1 - C$$

$$C = 1 - \frac{N}{n_0}$$

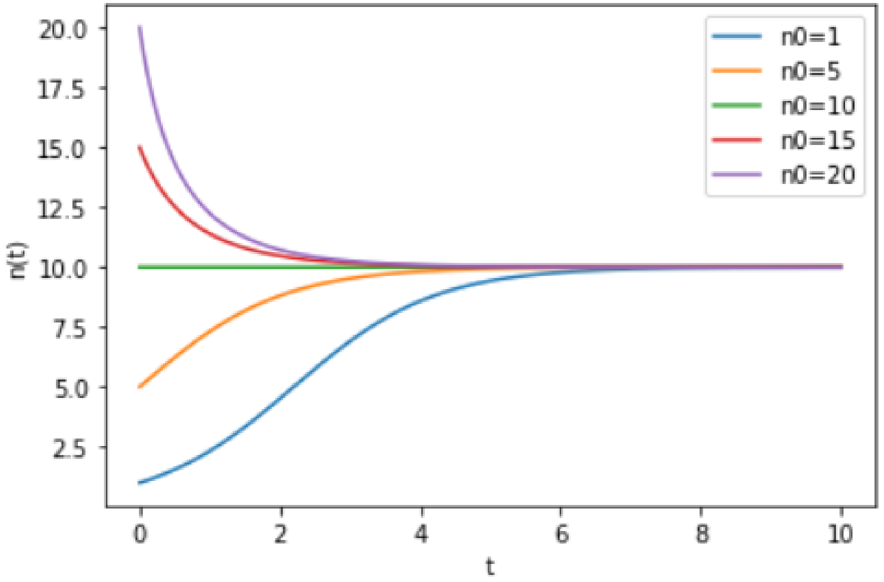
Rozwiązanie szczególne

- Ogólnym rozwiązaniem równania $\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ jest $n(t) = \frac{N}{1 - Ce^{-kt}}$
- Dla jakiego C spełniony będzie warunek początkowy $n(0) = n_0$?

$$C = 1 - \frac{N}{n_0}$$

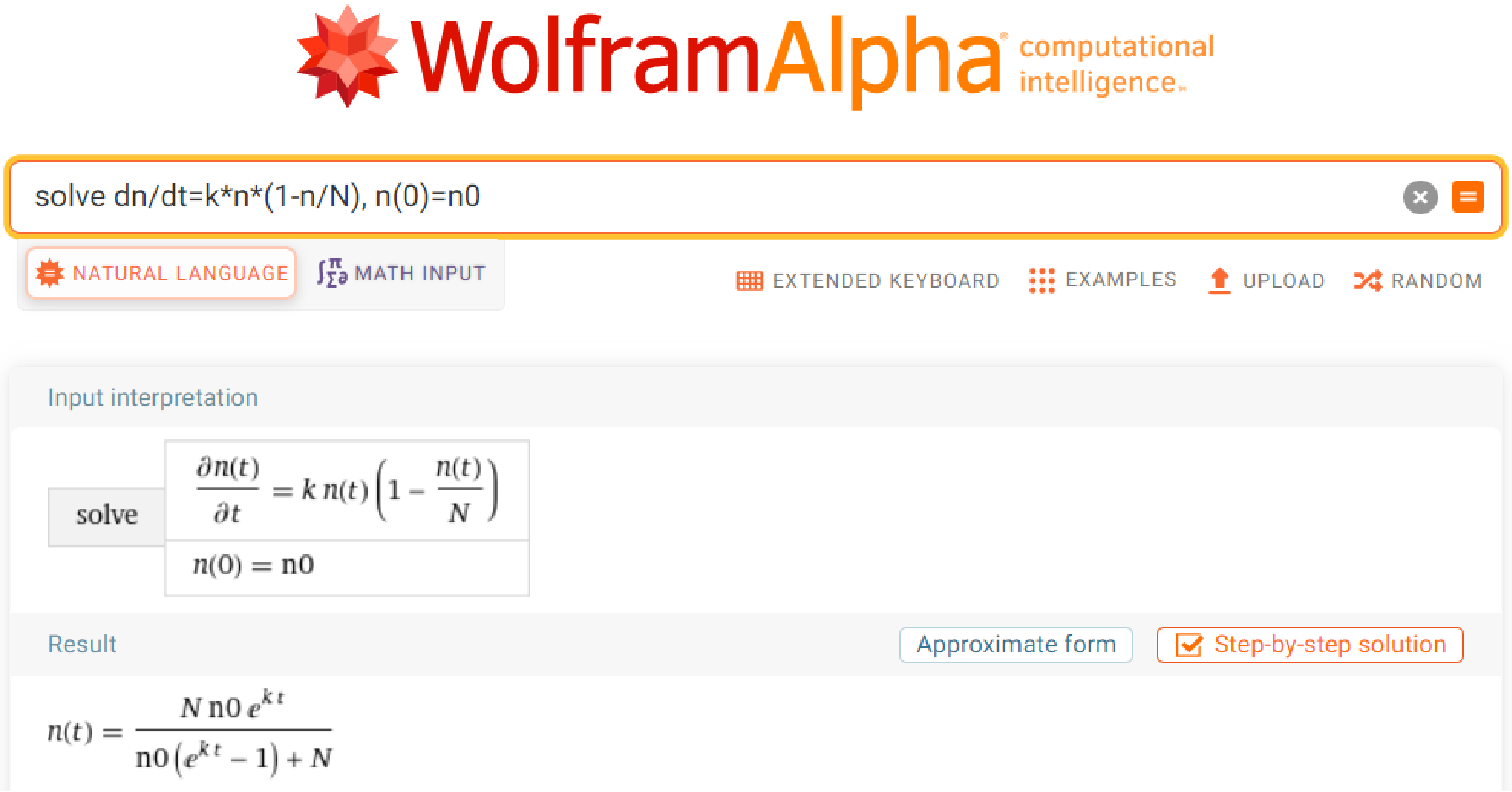
- Zatem nasze rozwiązanie szczególne to:

$$n(t) = \frac{N}{1 - \left(1 - \frac{N}{n_0}\right) e^{-kt}}$$

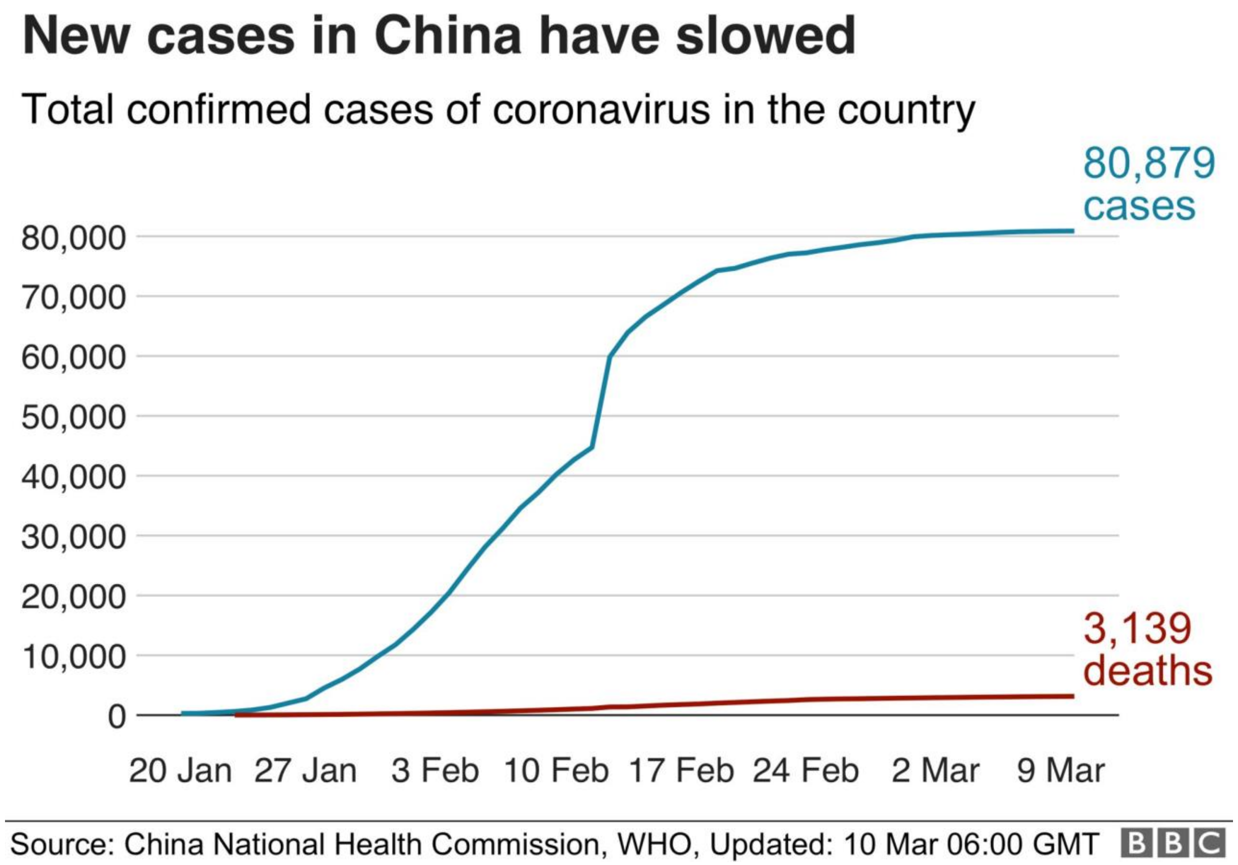


Równania różniczkowe w WolframAlpha

Równania różniczkowe w WolframAlpha



Związek z modelowaniem epidemii



Podsumowanie

- Nie musimy umieć rozwiązać równania różniczkowego, żeby je naszkicować oraz zbadać jego własności.
- Sprawdzamy w tym celu jak zmienia się wartość oraz znak pochodnej $\frac{dn}{dt}$, a następnie znajdujemy punkty stacjonarnych, w których $\frac{dn}{dt} = 0$ oraz określamy ich stabilność.
- W odnalezieniu analitycznych rozwiązań równań różniczkowych może pomóc strona www.wolframalpha.com
- Hodując króliki pamiętaj, żeby zadbać o ich odpowiednią dietę :)