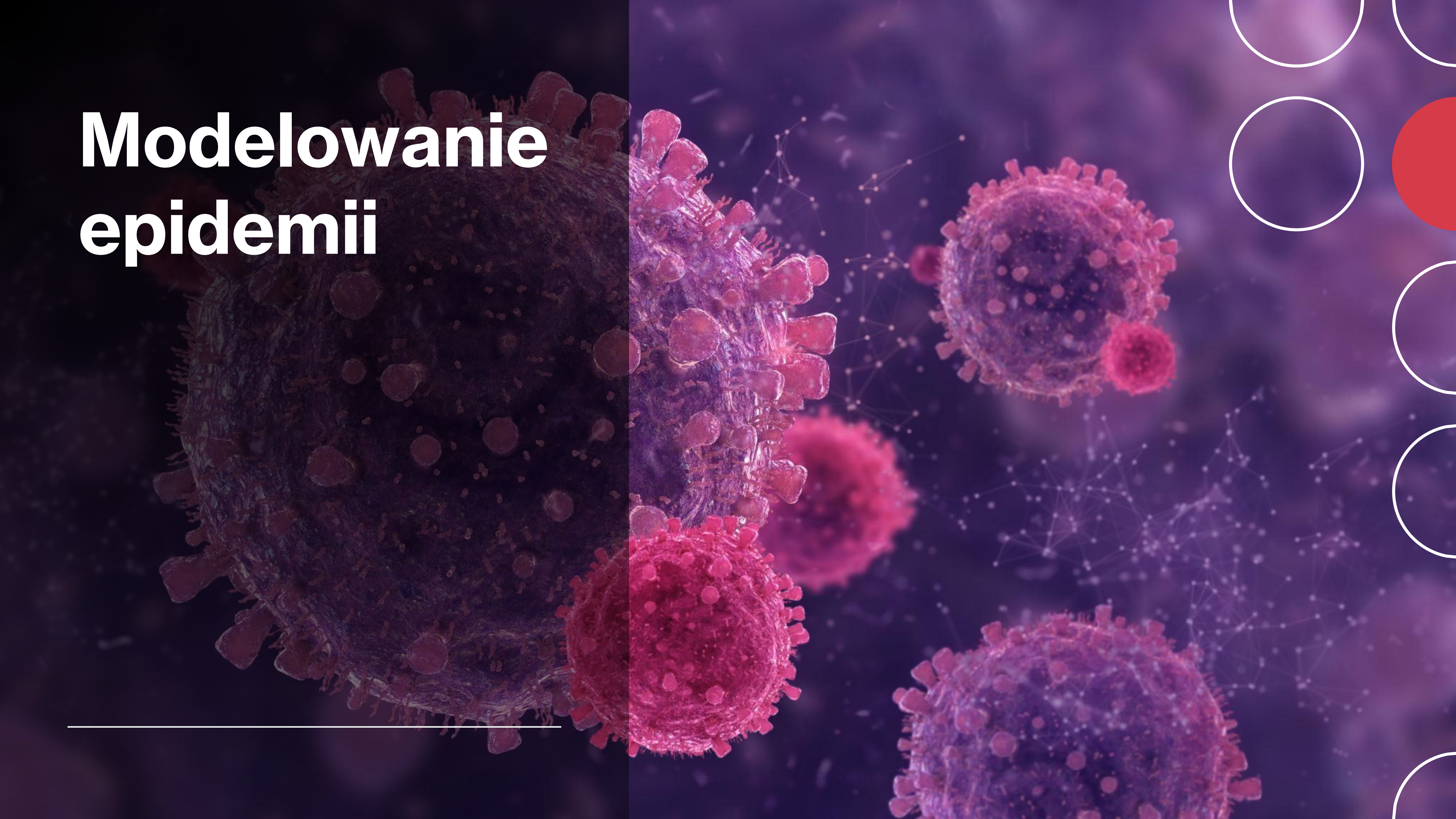
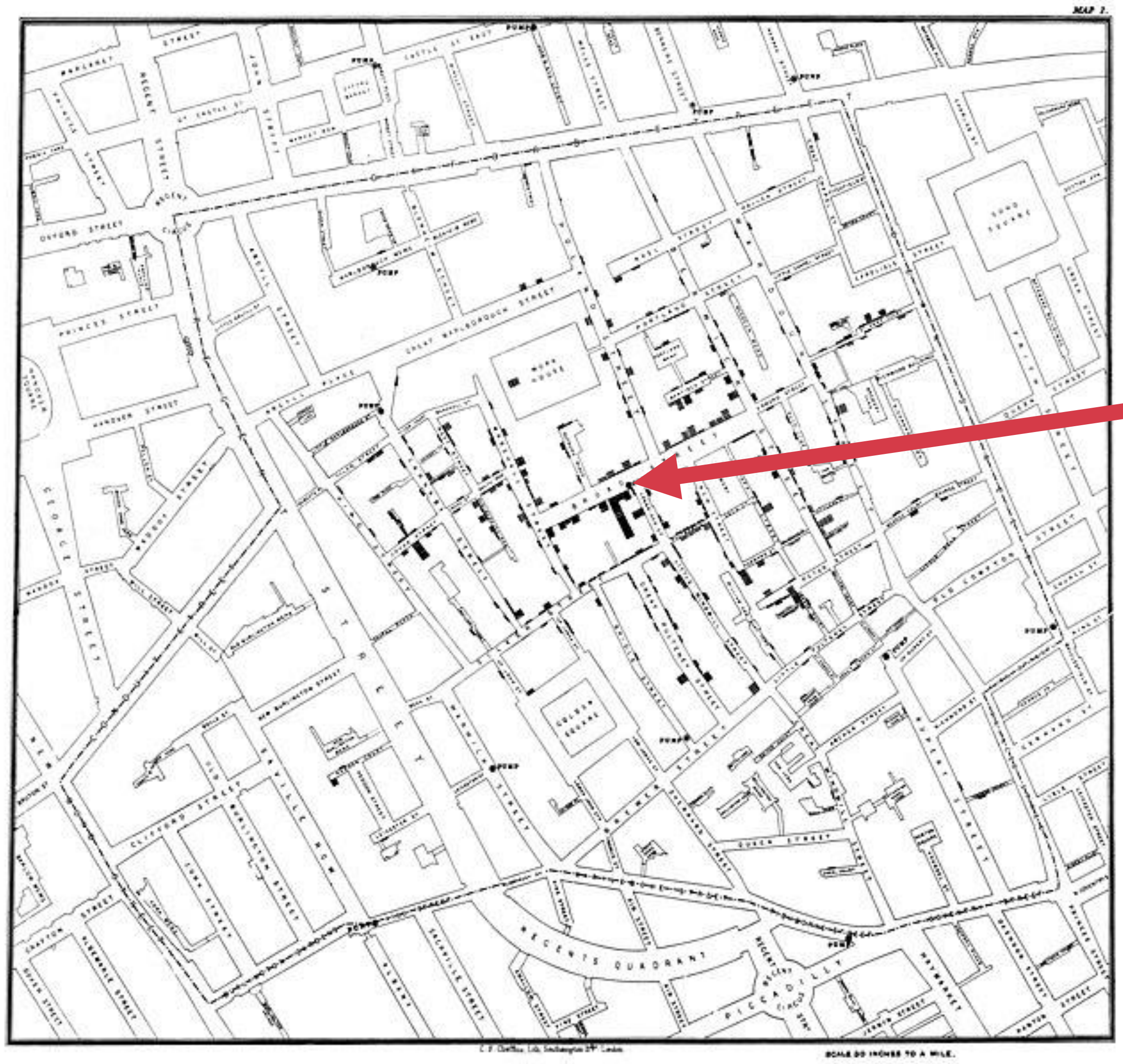
Modelowanie epidemii



Jak naukowcy wspomagają decyzje rządu?

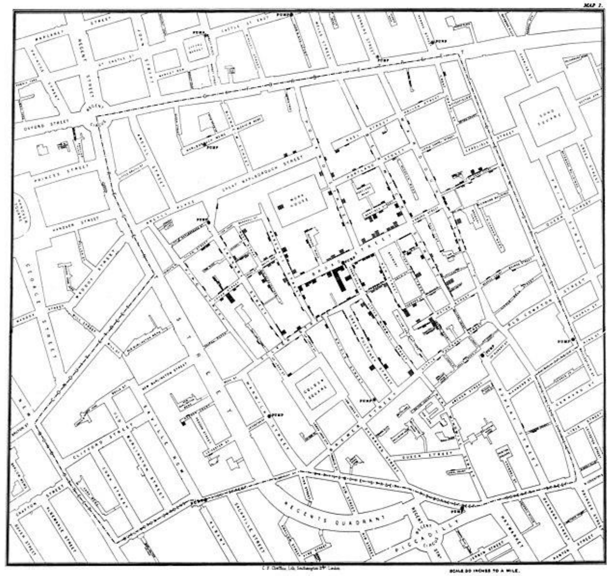
Źródło: https://www.gov.uk/government/speeches/pm-statement-on-coronavirus-12-march-2020



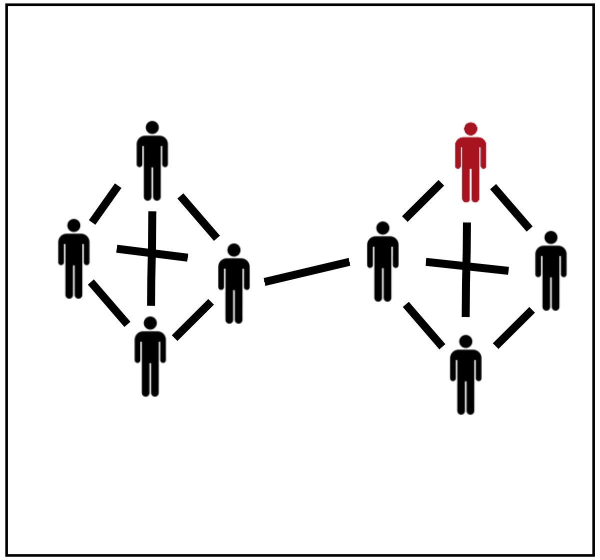
Mapa Londynu z zaznaczonymi miejscami zakażeń na cholerę w Londynie w 1854 roku autorstwa Johna Snowa.

Różne podejścia do modelowania epidemii

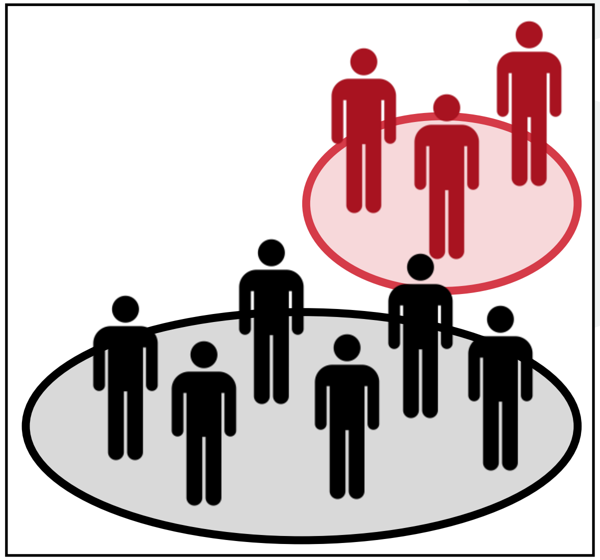
Modele statystyczne/przestrzenne



Modele wieloagentowe / sieciowe

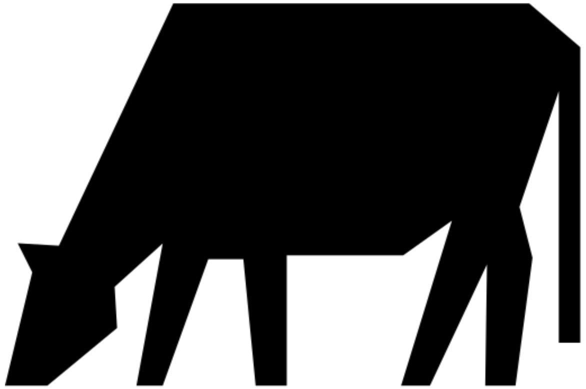


Model przedziałowe

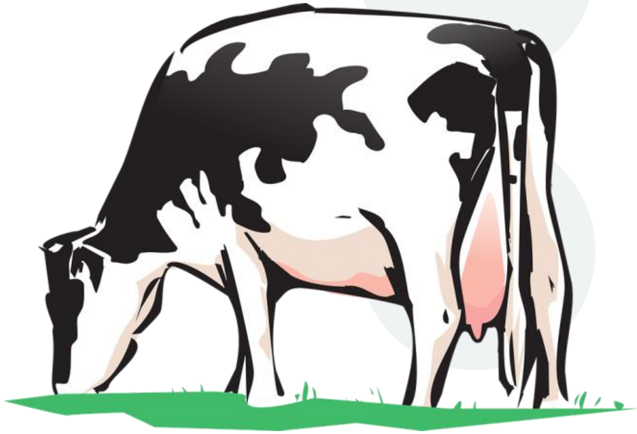


Konstrukcja modelu

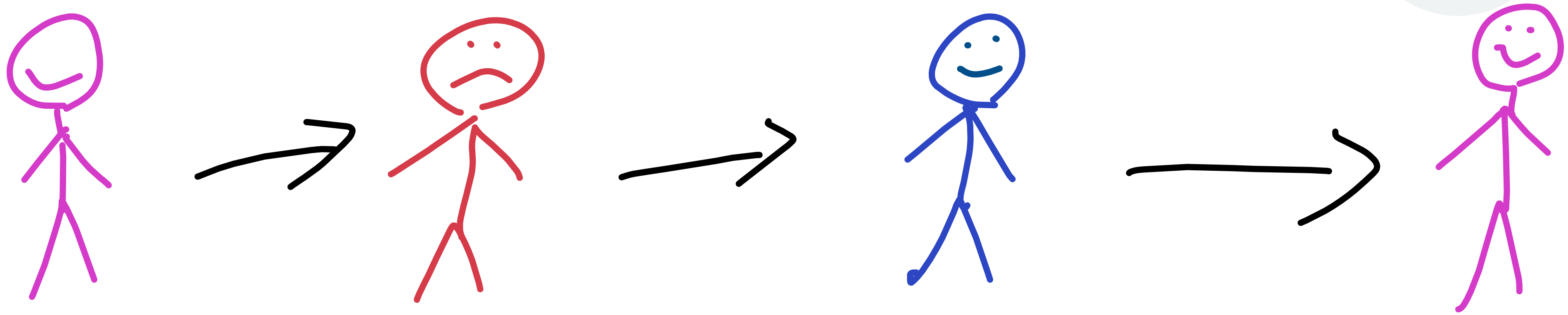
Rzeczywistość → **Prosty model** → **Rozbudowany model**



Author: Luis Prado



Model SIR i SIRS



S — Susceptible (podatni)

I — Infected (zainfekowani)

R — Recovered (ozdrowiali)

S — Susceptible (podatni)

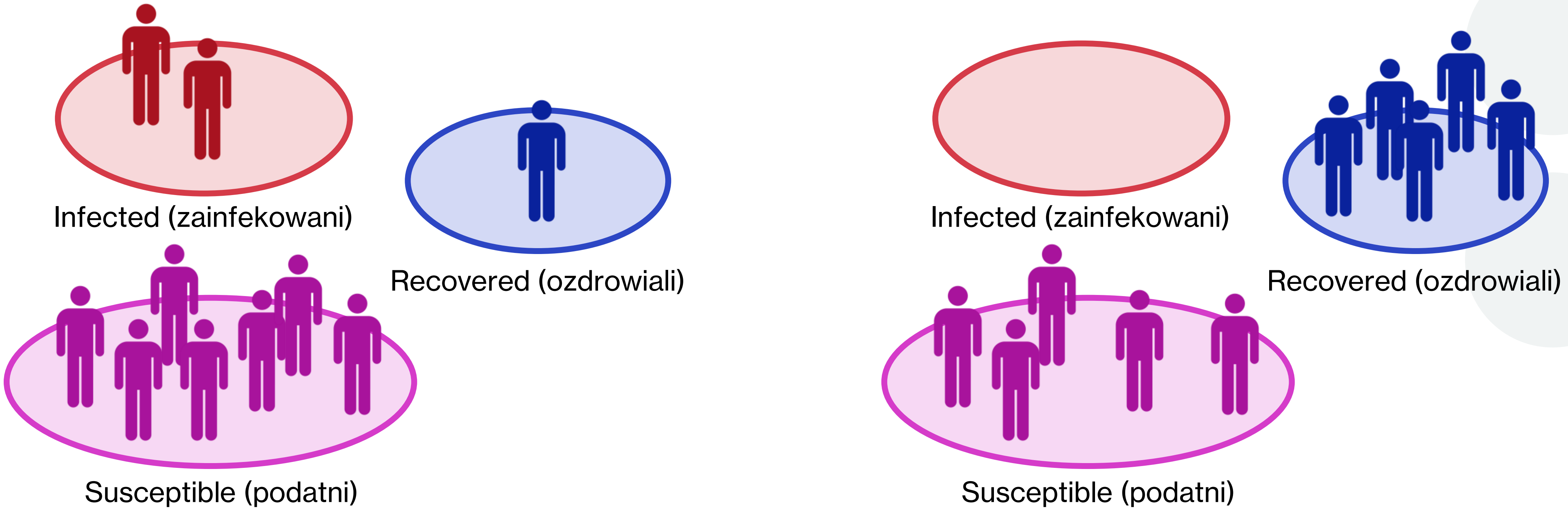
Stan obecny

S = 7
I = 2
R = 1

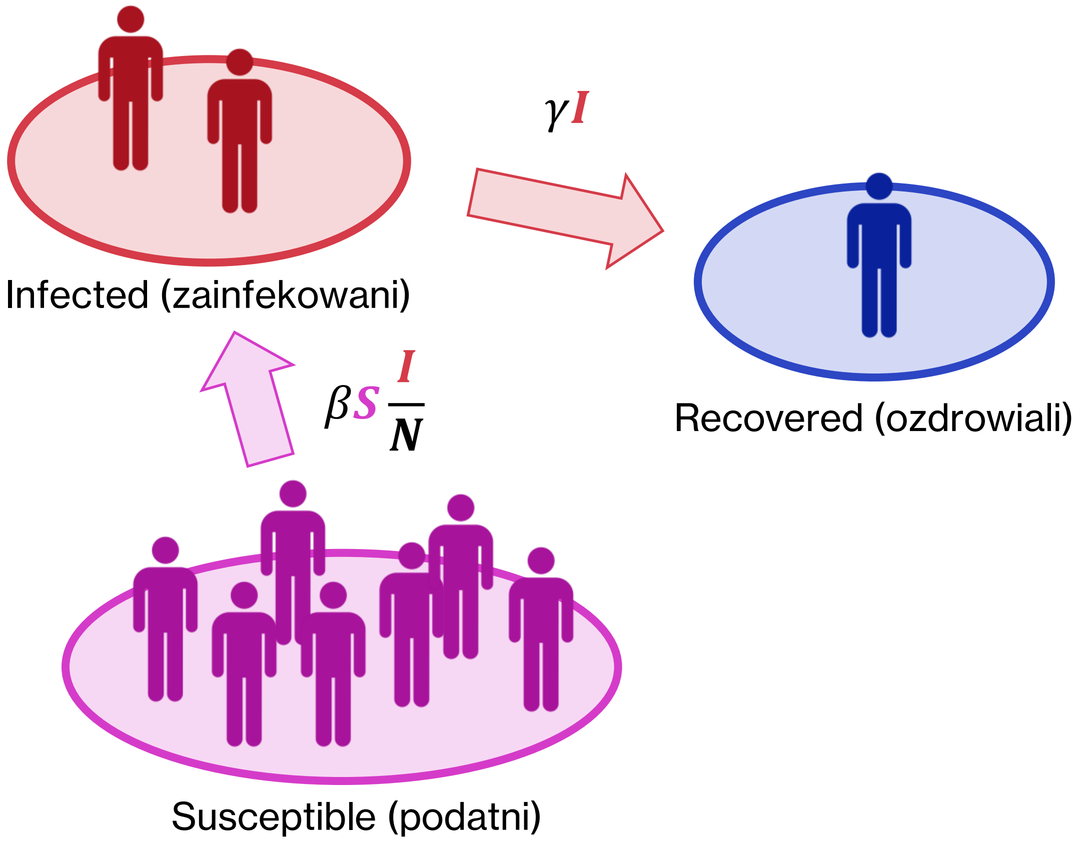
Δt

Stan następny

S = ???
I = ???
R = ???



Model SIR

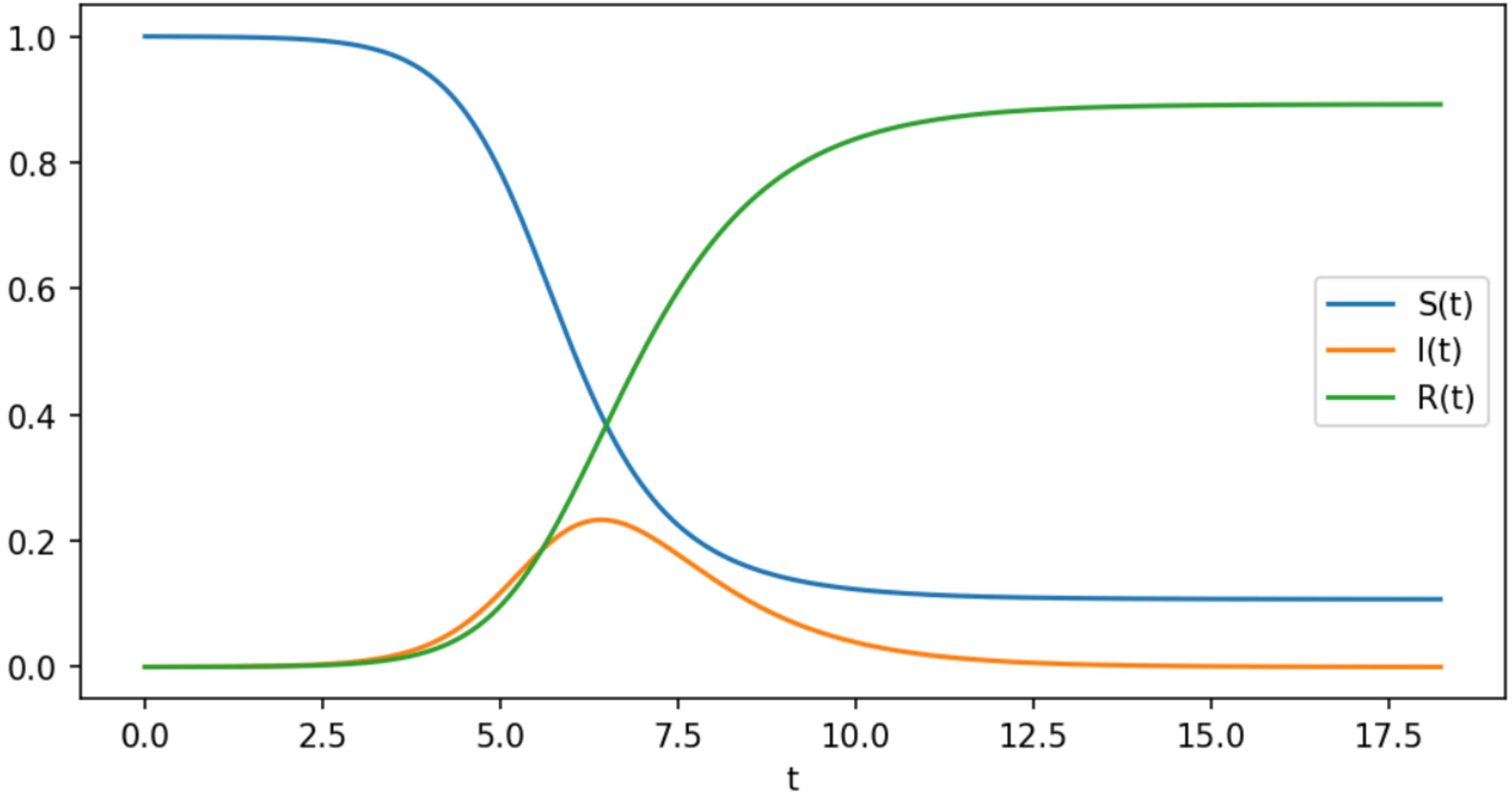


$$\frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Przykładowe rozwiązanie



Jak szybko rozchodzi się epidemia?

Rozwiązanie we wczesnej fazie epidemii

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{dt}} = -\beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} = \gamma I$$

We wczesnej fazie epidemii mamy bardzo mało osób chorych w porównaniu do całej populacji. Zatem przyjmijmy $\frac{S}{N} \approx 1$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I$$

$$\approx \beta I - \gamma I = (\beta - \gamma) I$$

Rozwiązaniem równania jest:

$$I(t) = I_0 e^{(\beta - \gamma) t}$$

Z wykładu 4:

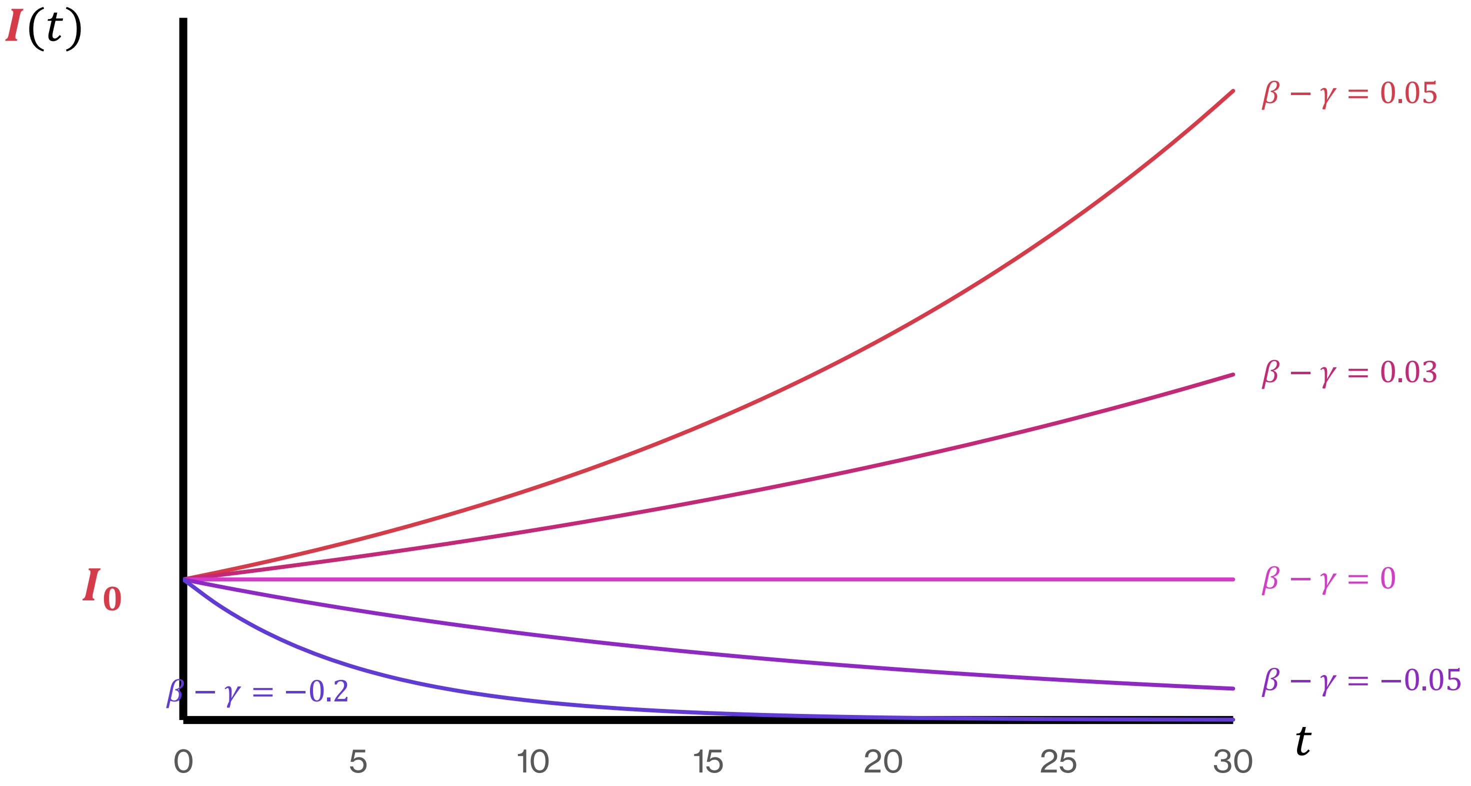
Rozwiązaniem równania

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n$$

jest

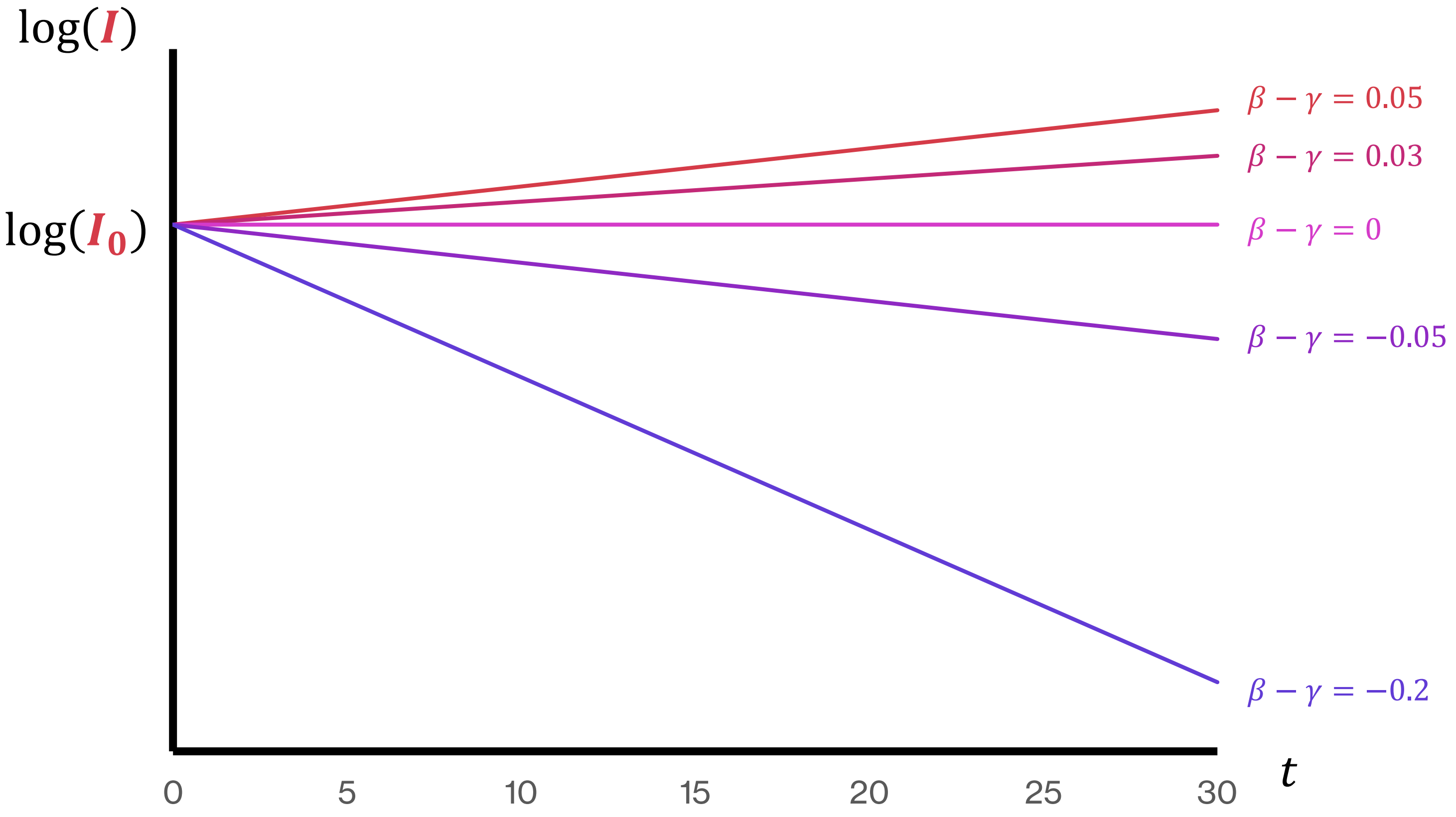
$$n(t) = n_0 e^{kt}$$

Rozwiązanie we wczesnej fazie epidemii



$$I(t) = I_0 e^{(\beta - \gamma)t}$$

Rozwiązanie we wczesnej fazie epidemii



$$I(t) = I_0 e^{(\beta-\gamma)t}$$

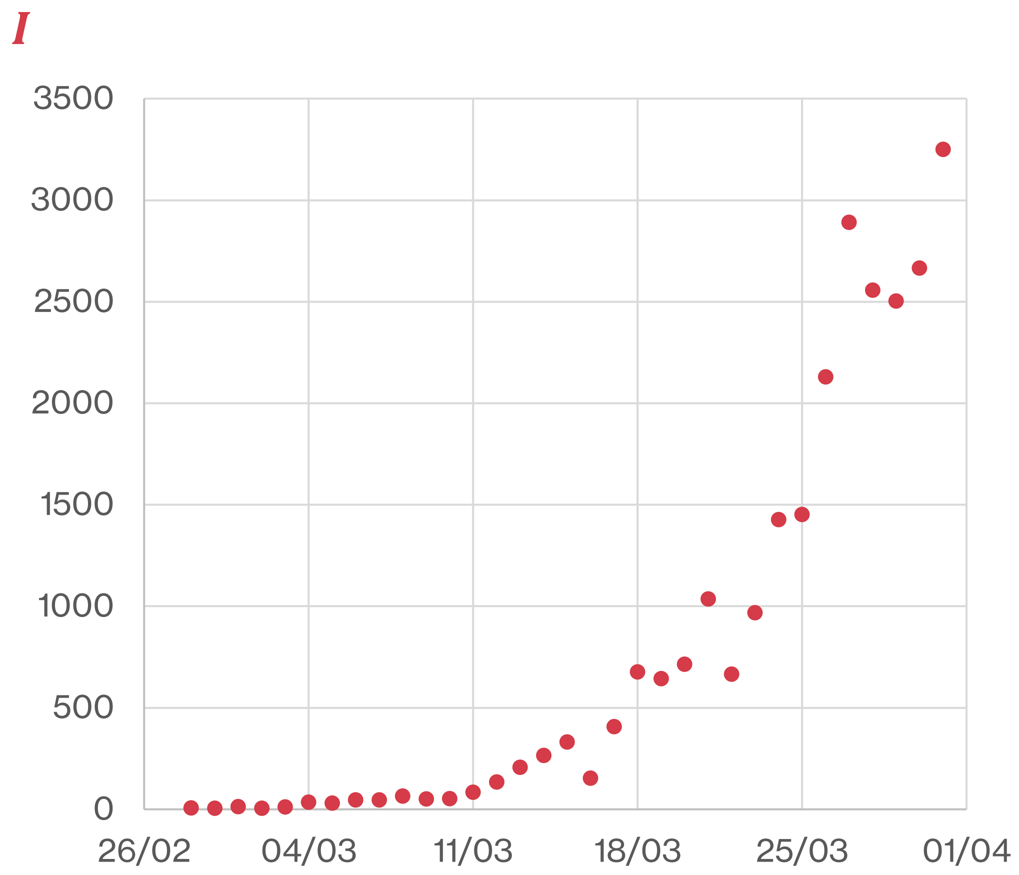
$$\log(I) = \log\left(I_0 e^{(\beta-\gamma)t}\right)$$

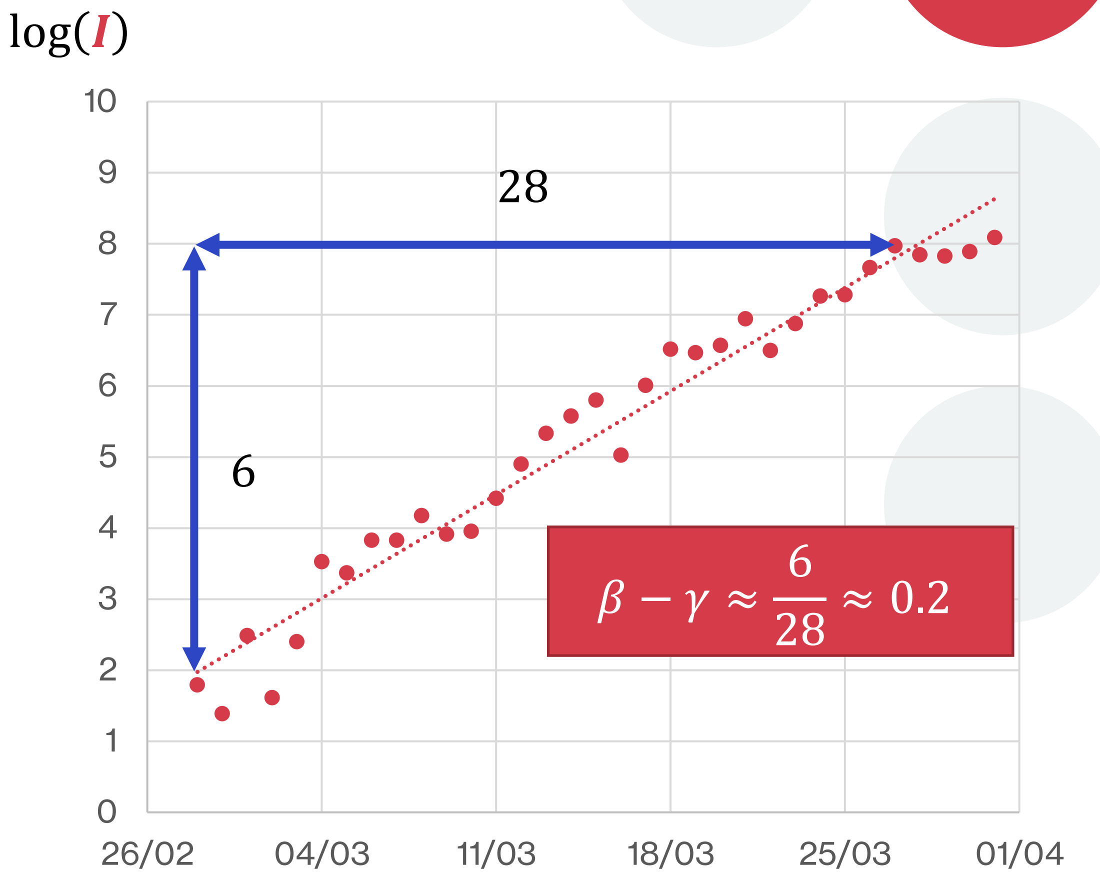
$$\log(I) = \log(I_0) + \log\left(e^{(\beta-\gamma)t}\right)$$

$$\log(I) = \log(I_0) + (\beta - \gamma)t$$

Parametr $\beta - \gamma$ możemy oszacować sprawdzając współczynnik kierunkowy.

Oszacujmy parametr wzrostu





Jak będzie epidemia dalej się rozwijać?

Jaki jest stan stacjonarny?

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{dt}} = -\beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} = \gamma I$$

Ze stanem stacjonarnym mamy do czynienia kiedy

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{dt}} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} = 0$$

Co możemy powiedzieć o wartości S , I oraz R w stanie stacjonarnym?

Odpowiedź: W stanie stacjonarnym $I = 0.$
Wartości S i R mogą być dowolne.

Liczba reprodukcyjna

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{dt}} = -\beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{dt}} = \gamma I$$

Kiedy liczba osób zainfekowanych będzie ubywać?

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I < 0$$

$$\beta \frac{S}{N} - \gamma < 0$$

$$\beta \frac{S}{N} < \gamma$$

$$\frac{\beta}{\gamma} \frac{S}{N} < 1$$

Liczba reprodukcyjna R_0 określa ile osób średnio zostaje zainfekowanych przez jednego zarażonego w populacji z przeważająca liczba osób zdrowych:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

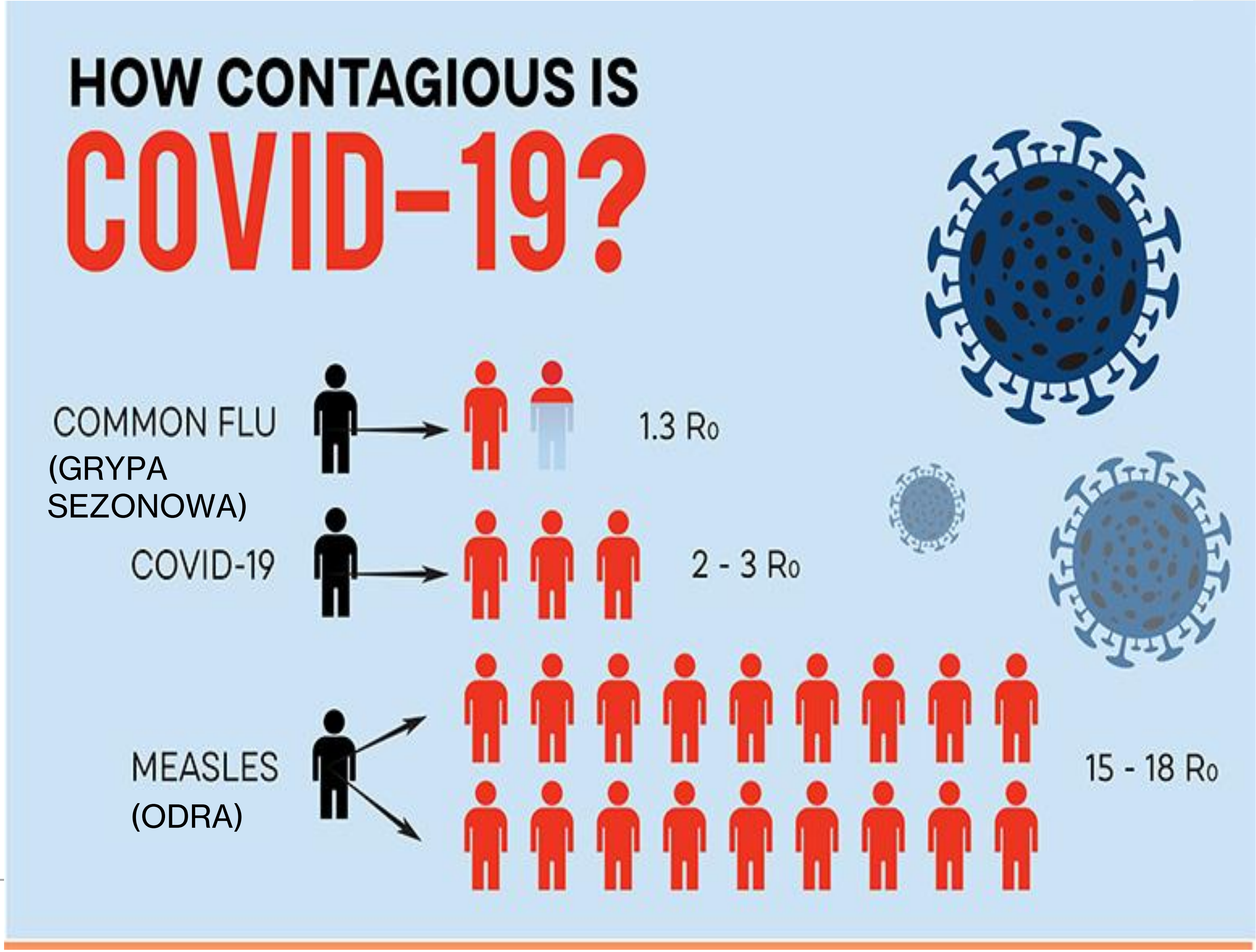

HOW CONTAGIOUS IS
COVID-19?
COMMON FLU
(GRYPA
SEZONOWA)
1.3 Ro
COVID-19
2 - 3 Ro
MEASLES
(ODRA)
15 - 18 Ro

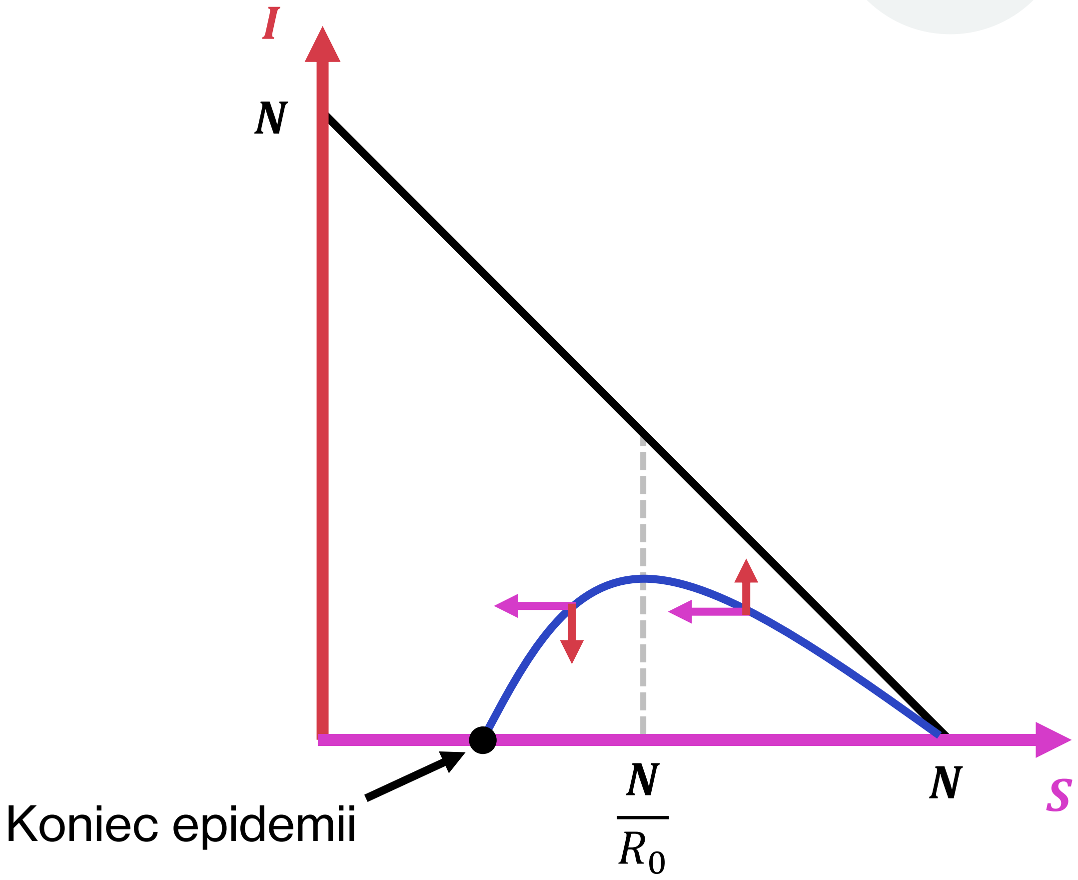
Diagram fazowy

Pokazaliśmy już, że liczba osób zainfekowanych maleje kiedy:

$$R_0 \frac{S}{N} < 1$$

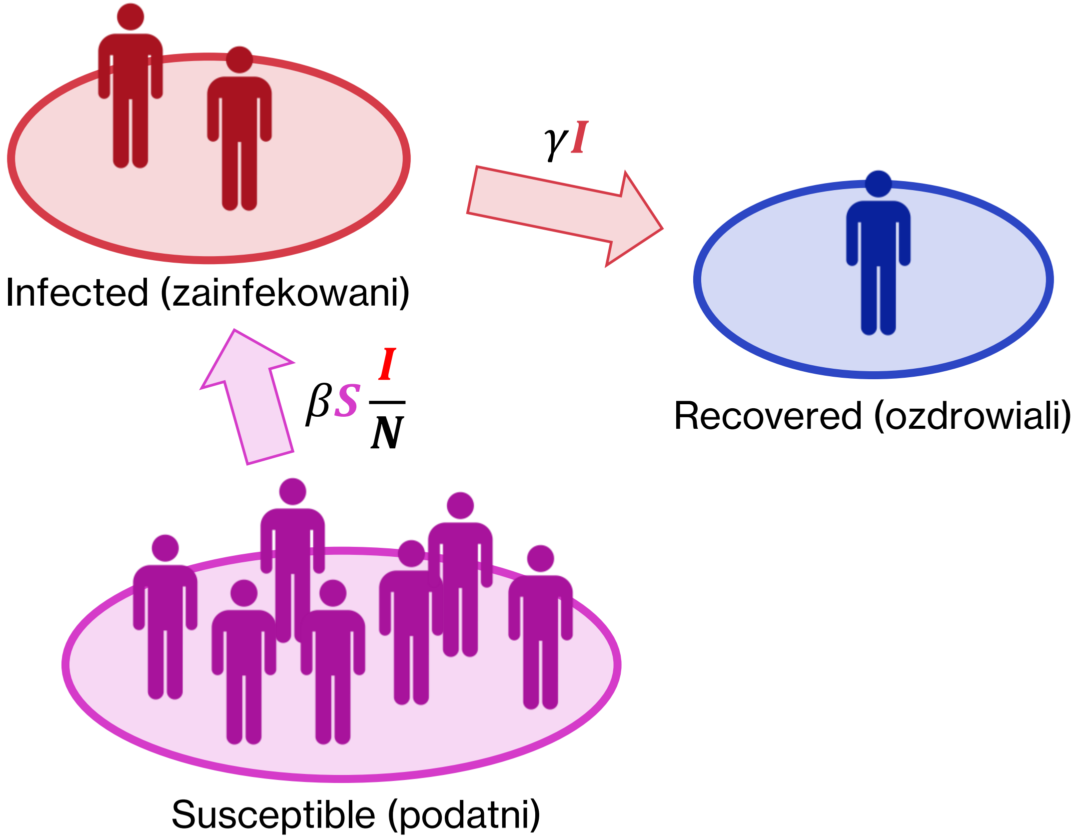
Czyli kiedy:

$$S < \frac{N}{R_0}$$



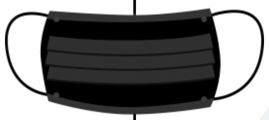
Jak można powstrzymać epidemię?

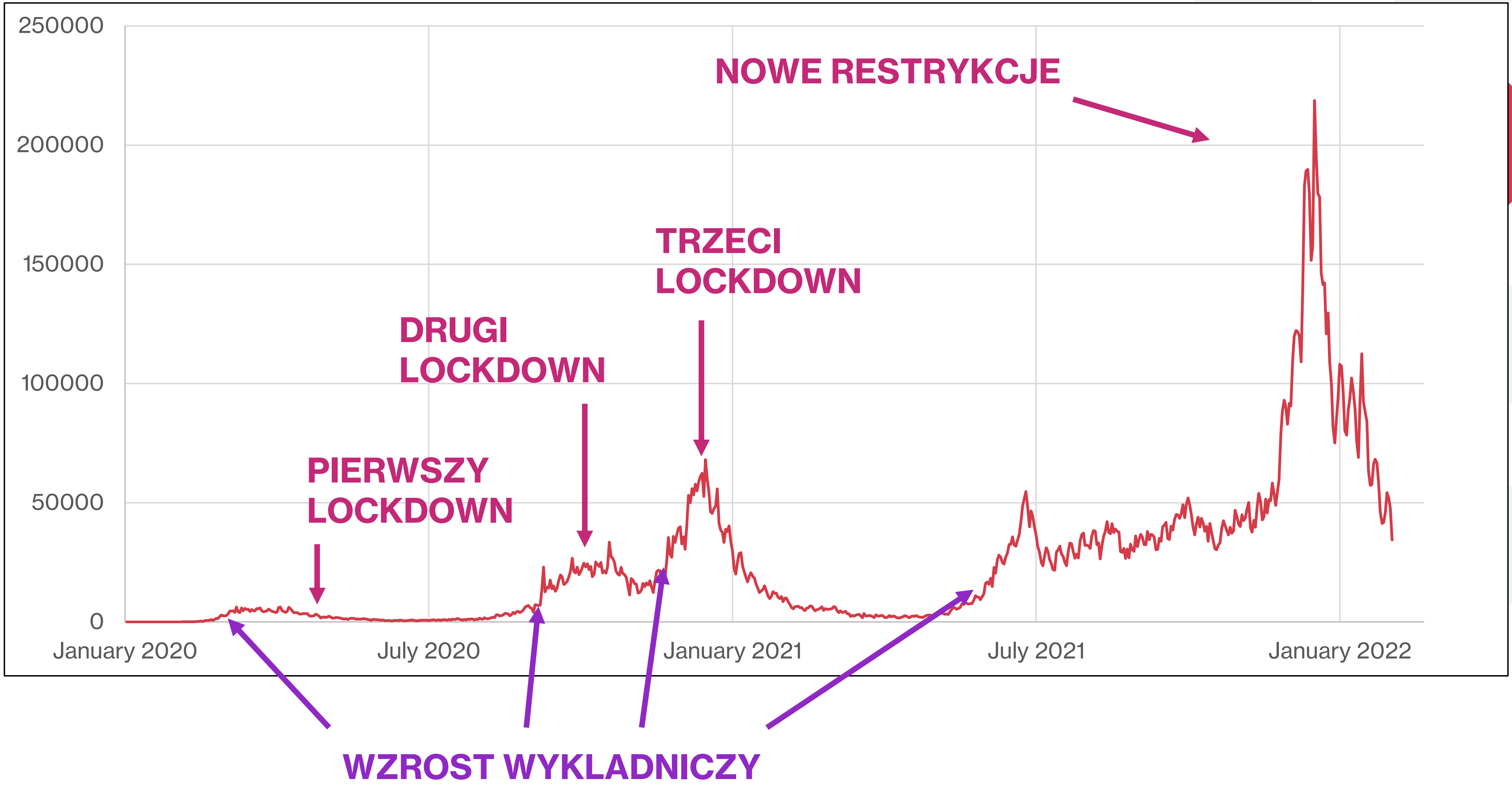
Sposób 1: restrykcje



Parametr β jest proporcjonalny do:

- liczby osób, z którymi się kontaktujemy,
- częstotliwości z jaką się kontaktujemy z daną osobą,
- prawdopodobieństwa, ze zostaniemy zainfekowani podczas kontaktu z chorą osobą.




250000
200000
150000
100000
50000
0
January 2020
July 2020
January 2021
July 2021
January 2022
NOWE RESTRYKCJE
TRZECI LOCKDOWN
DRUGI LOCKDOWN
PIERWSZY LOCKDOWN
WZROST WYKLADNICZY

Sposób 2: Szczepienia

Ile osób musi zostać uodpornionych, żeby powstrzymać pandemię?

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{N}} < 1$$

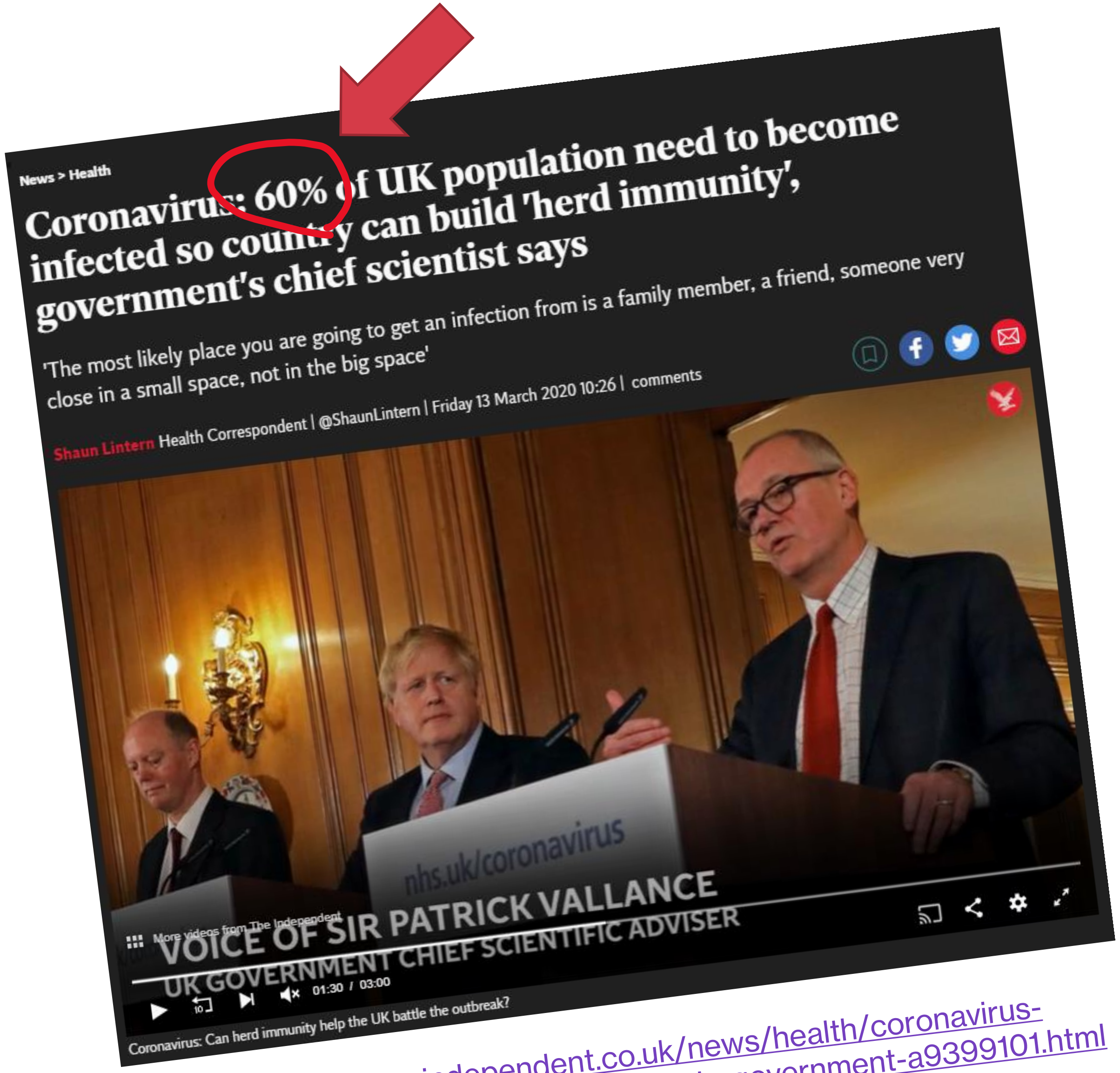
Stała $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ jest równa około 2-3. Weźmy $R_0 = 2.5$

$$2.5\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{N}} < 1$$

$$\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{N}} < \frac{1}{2.5} = 40\%$$

Musimy zatem uodpornić 60% populacji.

Photo © Alex Gakos / Shutterstock.com


News > Health

Coronavirus: 60% of UK population need to become infected so country can build 'herd immunity', government's chief scientist says

'The most likely place you are going to get an infection from is a family member, a friend, someone very close in a small space, not in the big space'

Shaun Lintern Health Correspondent | @ShaunLintern | Friday 13 March 2020 10:26 | comments

Coronavirus: Can herd immunity help the UK battle the outbreak?

Źródło: https://www.independent.co.uk/news/health/coronavirus-herd-immunity-uk-nhs-outbreak-pandemic-government-a9399101.html

Tim Spector OBE, lead scientist on the ZOE COVID Symptom Study app and Professor of Genetic Epidemiology at King's College London, comments on the latest data:

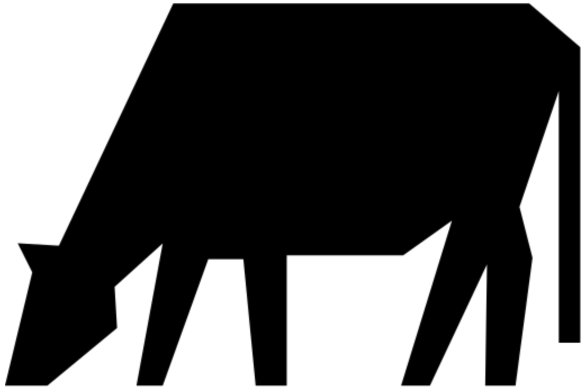
"As the UK slowly exits lockdown, I'm encouraged to see COVID cases continue to fall with our rates among the lowest in Europe. In fact, the UK closely mirrors cases in Israel with its exemplar vaccine programme. Based on our data and countries like Israel, I believe the fall in cases since January is mainly thanks to the vaccination programme and less about the strict lockdown the UK has been under since late December. With up to 60% of the population vaccinated and around 5-10% with natural immunity due to infection, we're starting to see herd immunity take effect. This should prevent future large-scale outbreaks. However, we do expect to see smaller, manageable outbreaks in the coming weeks and months among groups which are yet to be vaccinated."

Źródło: https://covid.joinzoe.com/post/is-the-uk-close-to-herd-immunity

Rozbudowa modelu SIR

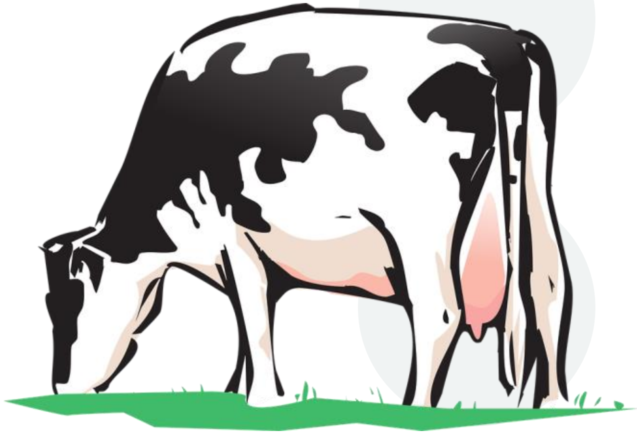
Rzeczywistość

Prosty model



Author: Luis Prado

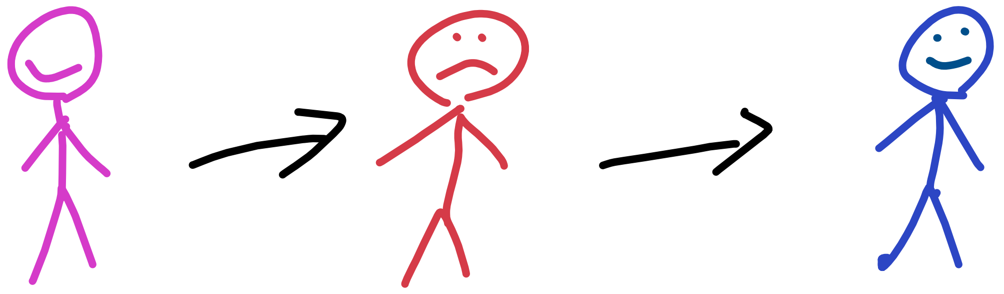
Rozbudowany model



Uproszczenia zawarte w modelu SIR

1. Każdy osobnik populacji ma takie samo prawdopodobieństwo zarażenia się.
2. Zakładamy, że zainfekowani mogą zarażać od momentu, kiedy zostaną zarażeni.
3. Szansa na wyzdrowienie jest niezależna od długości infekcji.
4. Nie uwzględniamy zmiany populacji w skutek narodzin i śmierci.
5. Nie uwzględniamy uodparniania się populacji na skutek szczepień.

Rozbudowa modelu



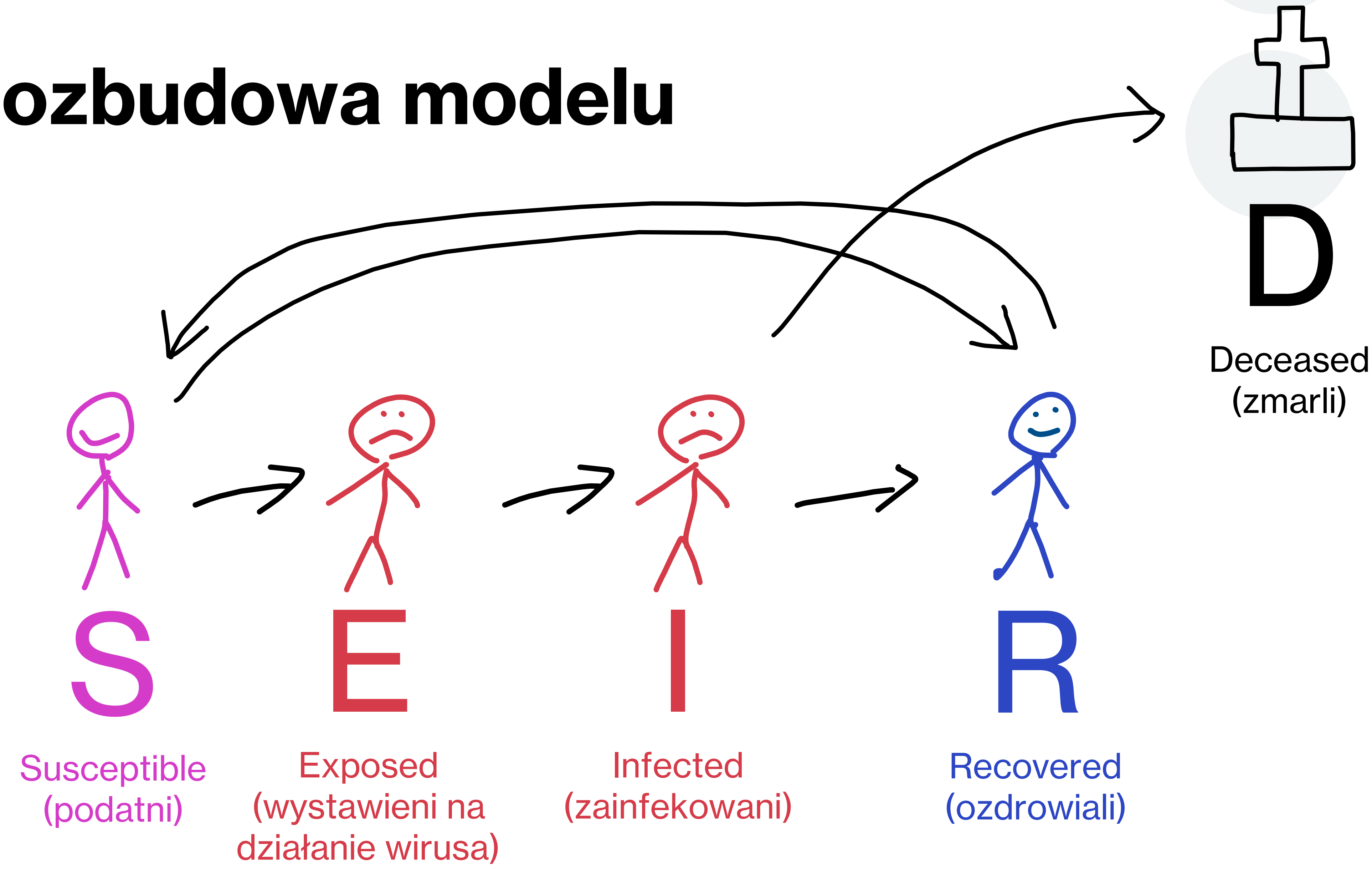
S — I — R

Susceptible (podatni)

Infected (zainfekowani)

Recovered (ozdrowiali)

Rozbudowa modelu



Podsumowanie

1. Układy dynamiczne pełnią bardzo ważną rolę w modelowaniu epidemii, np. model SIR.
2. Pozwala on oszacować szybkość rozchodzenia się epidemii oraz przeanalizować efekt różnych interwencji.
3. Nawet proste modele matematyczne pozwalają nam podejmować kluczowe decyzje w walce z epidemią koronawirusa.