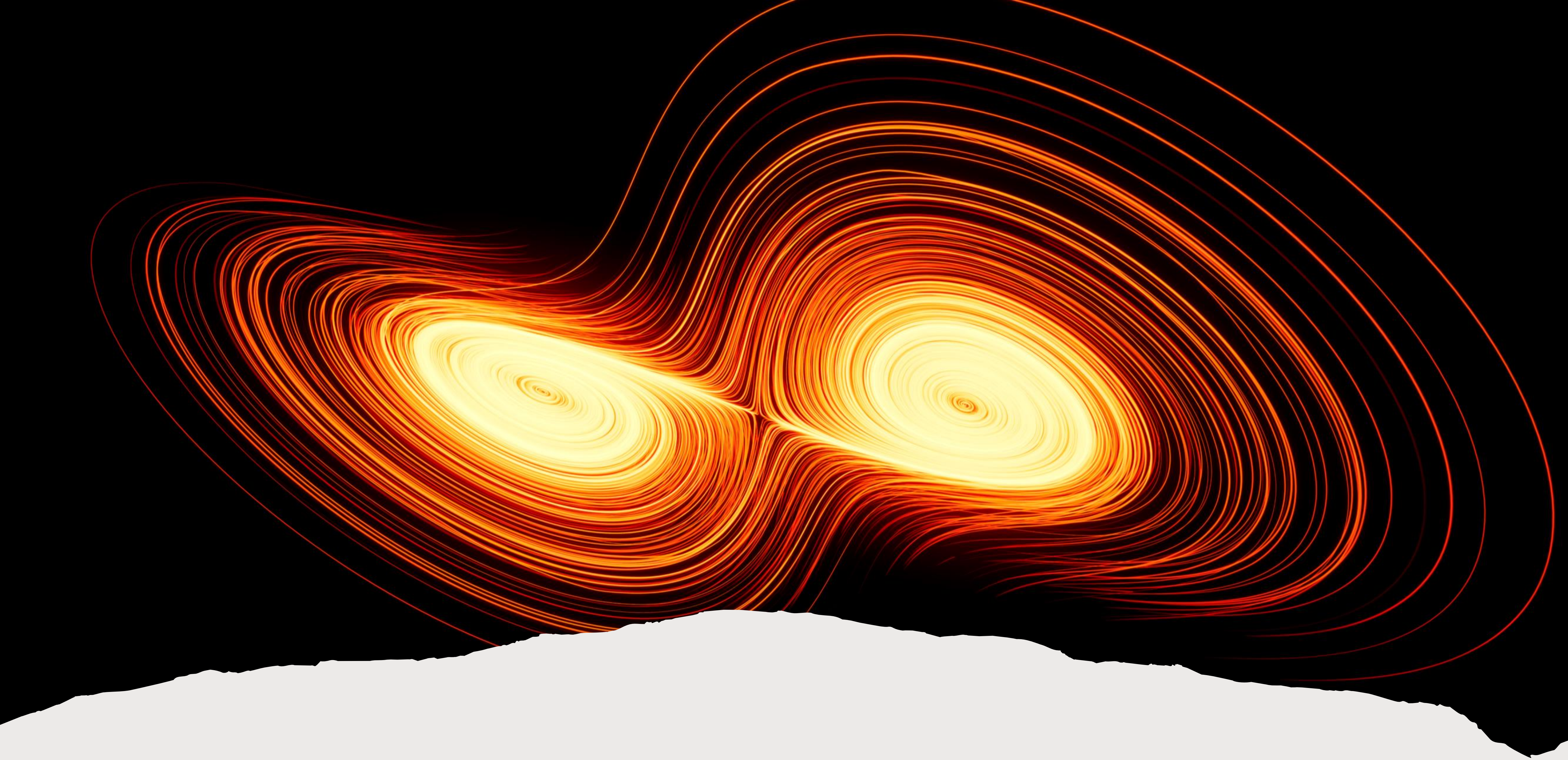
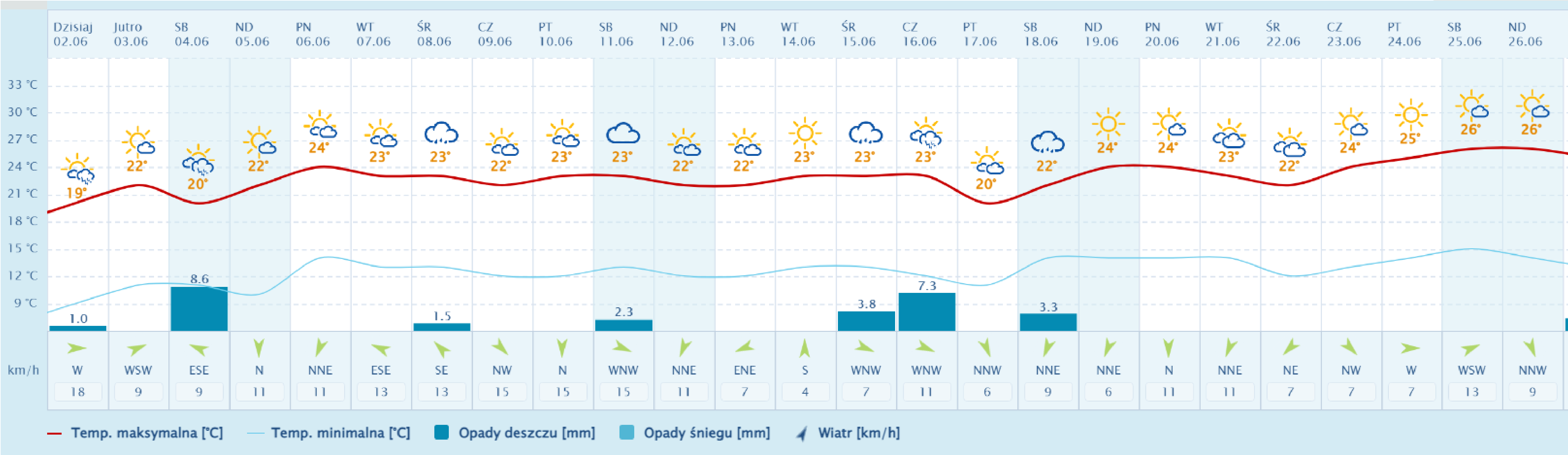
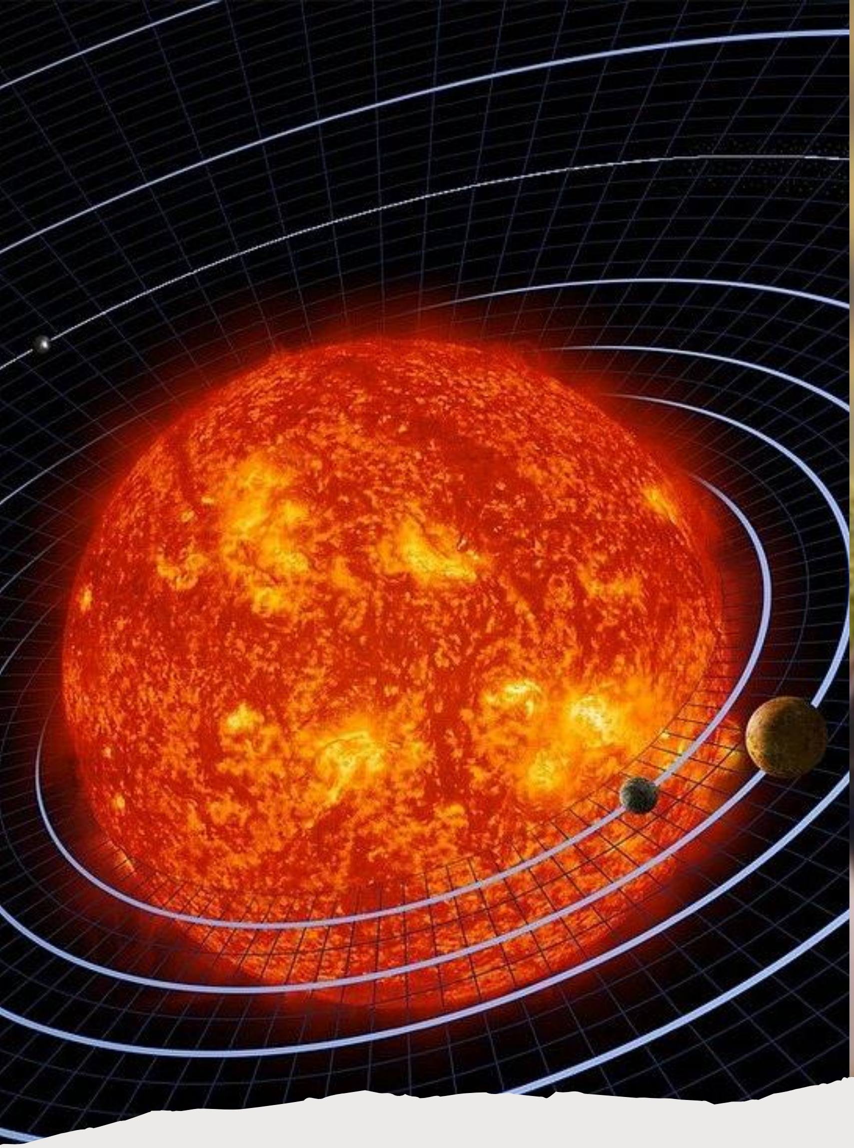


# Chaos w układach dynamicznych

# Motywacja




**Źródło:** https://pogoda.interia.pl/prognoza-dlugoterminowa-warszawa,cId,36917



# PRZYKŁADY UKŁADÓW CHAOTYCZNYCH

# PRZYKŁADY UKŁADÓW CHAOTYCZNYCH

# Układ Lorentza

Szybkość konwekcji

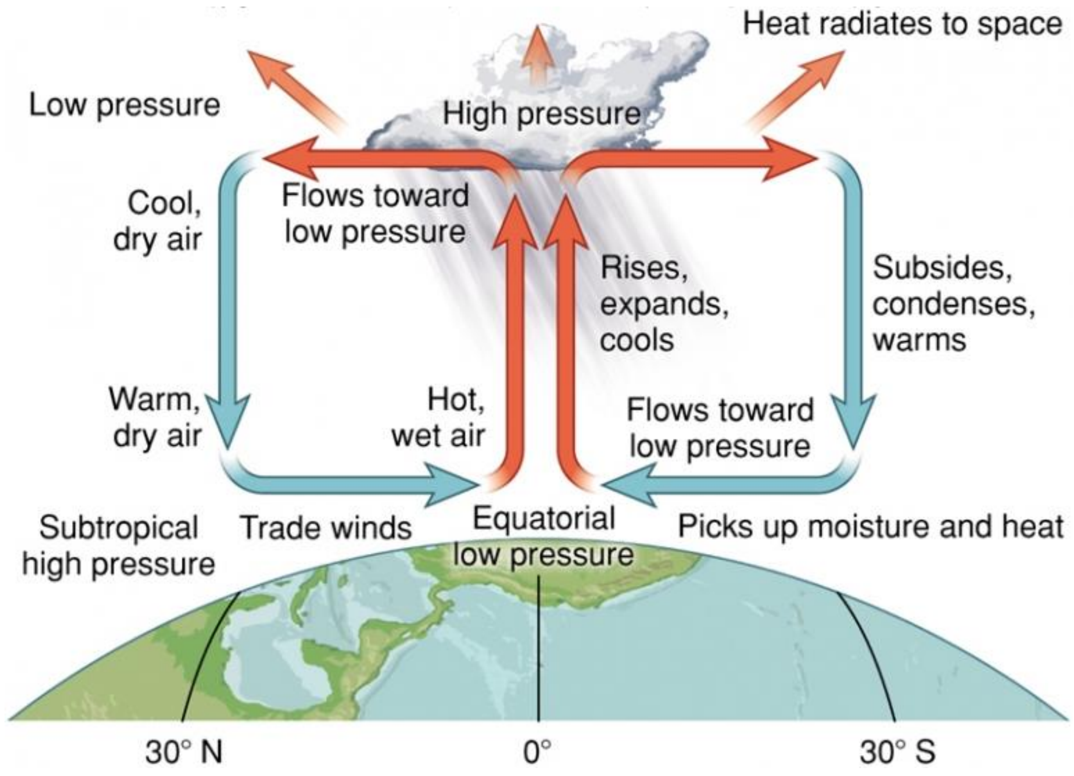
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

Pozioma różnica temperatury

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

Pionowy profil temperatury

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$




**Źródło:** The McGraw-Hill Companies

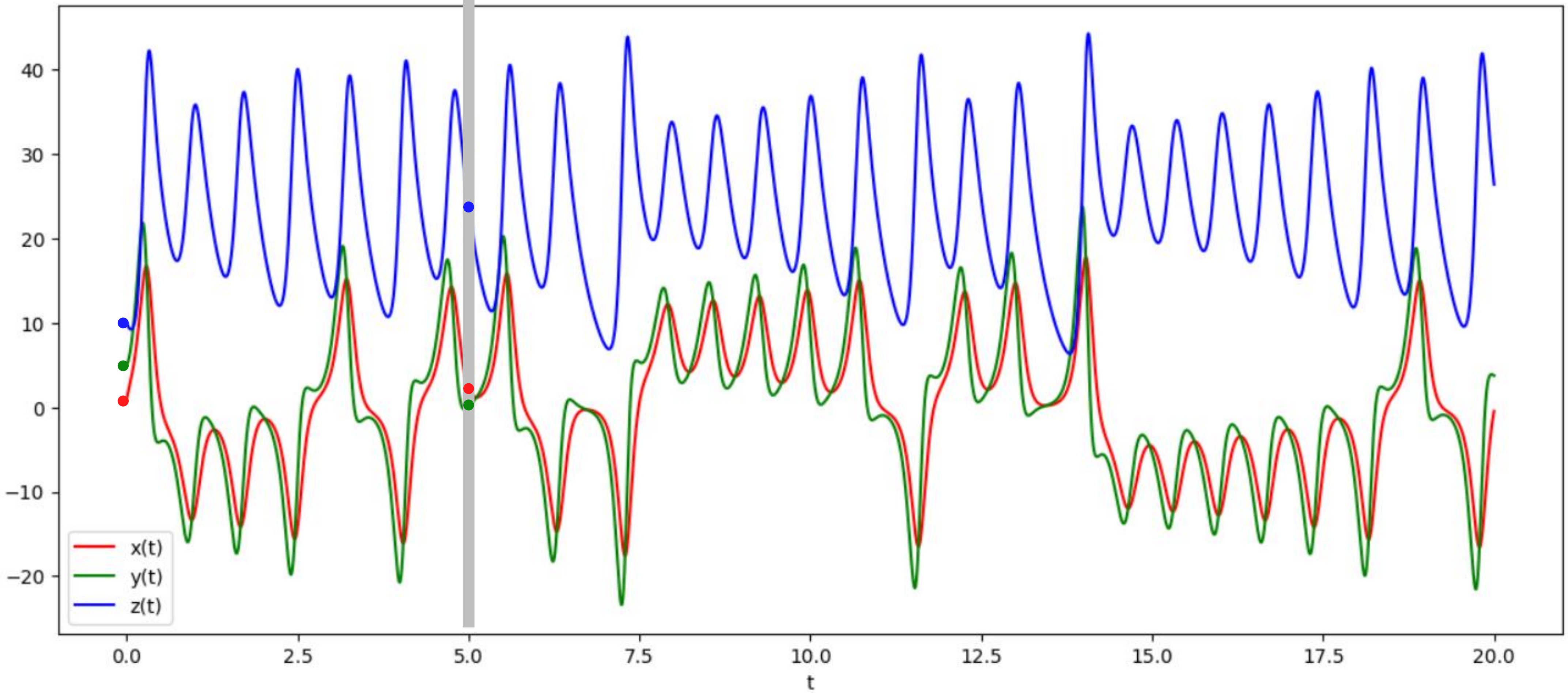
# Zarys historyczny

**Edward Norton Lorenz**
(1917–2008)


LGP-30

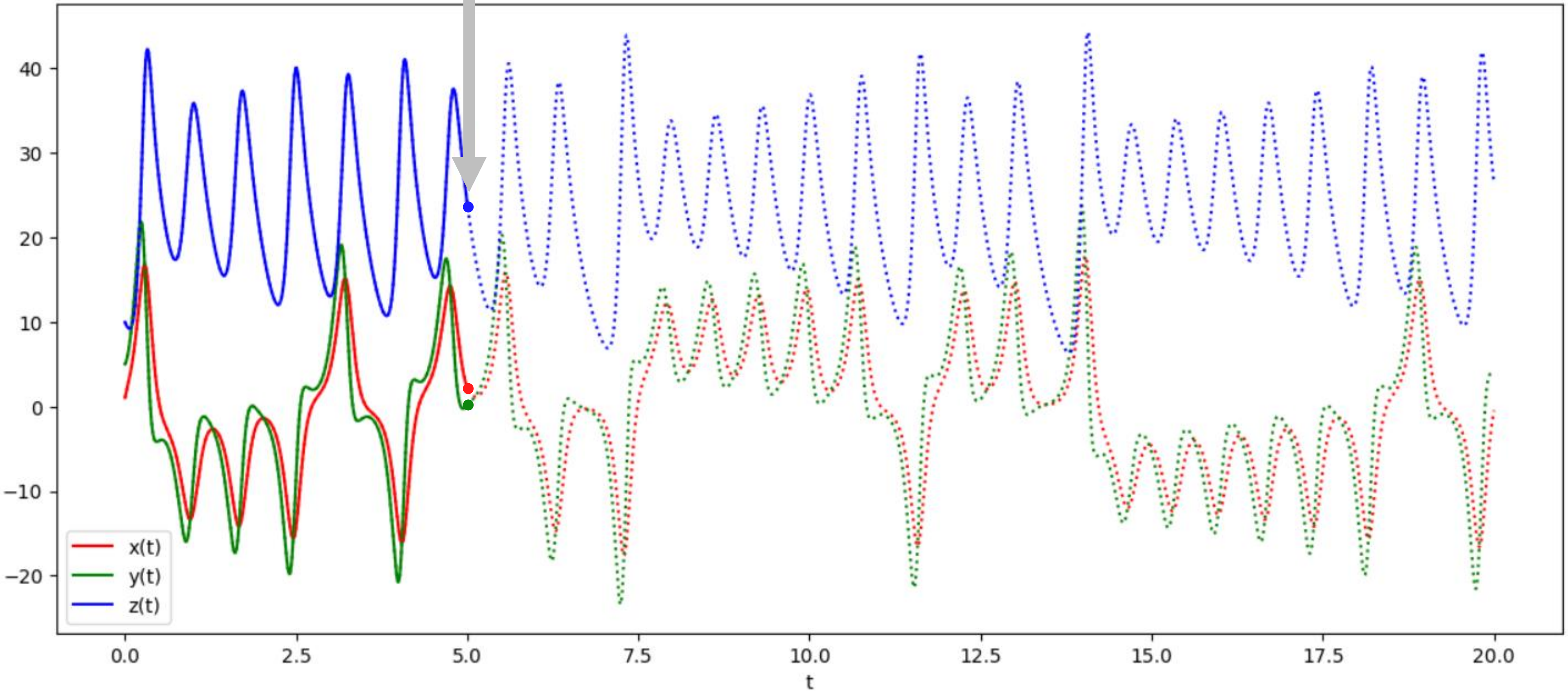
$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 5$$
$$z_0 = 10$$

$$x(5) = 2.1924739798976205$$
$$y(5) = 0.07435927584981447$$
$$z(5) = 23.97909183339912$$



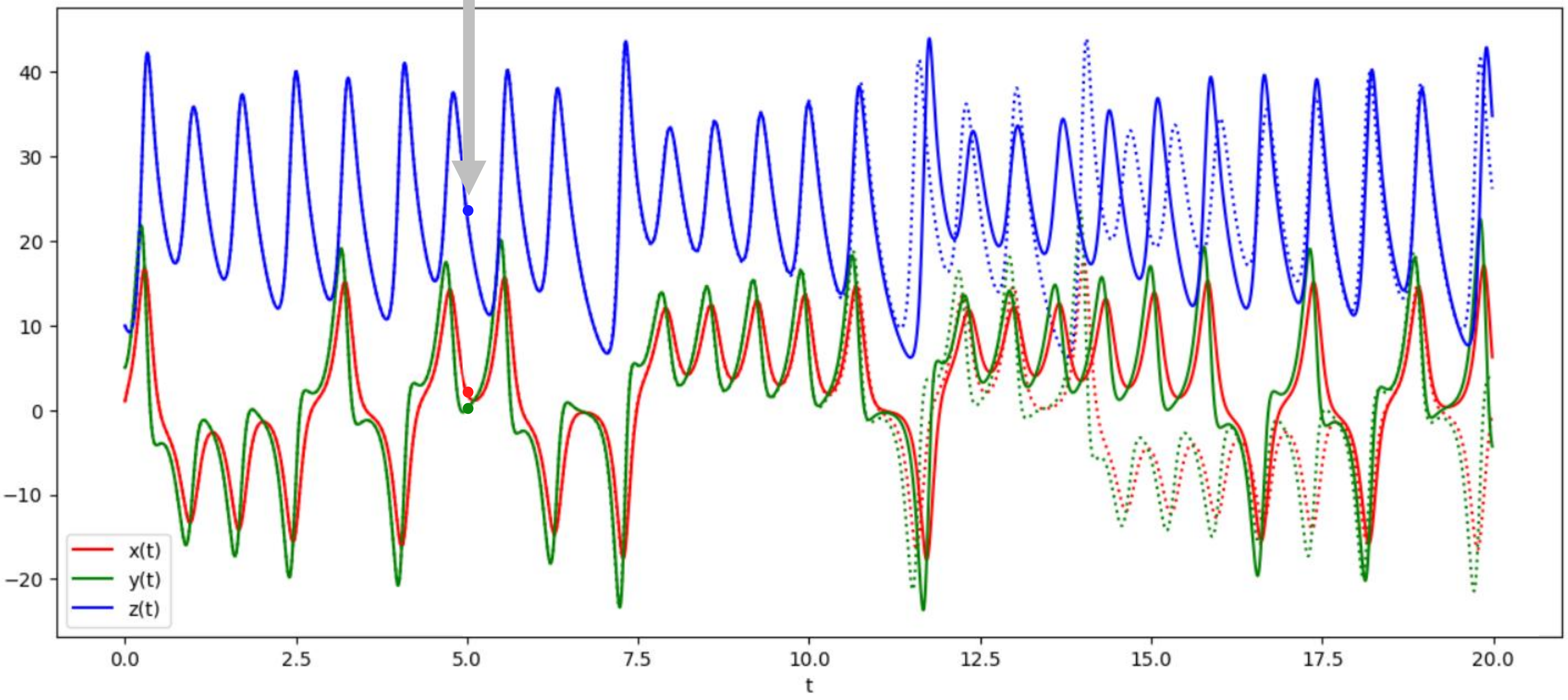
$$x(5) = 2.2$$
$$y(5) = 0.074$$
$$z(5) = 24$$

$$x(5) = 2.1924739798976205$$
$$y(5) = 0.07435927584981447$$
$$z(5) = 23.97909183339912$$



$$x(5) = 2.2$$
$$y(5) = 0.074$$
$$z(5) = 24$$

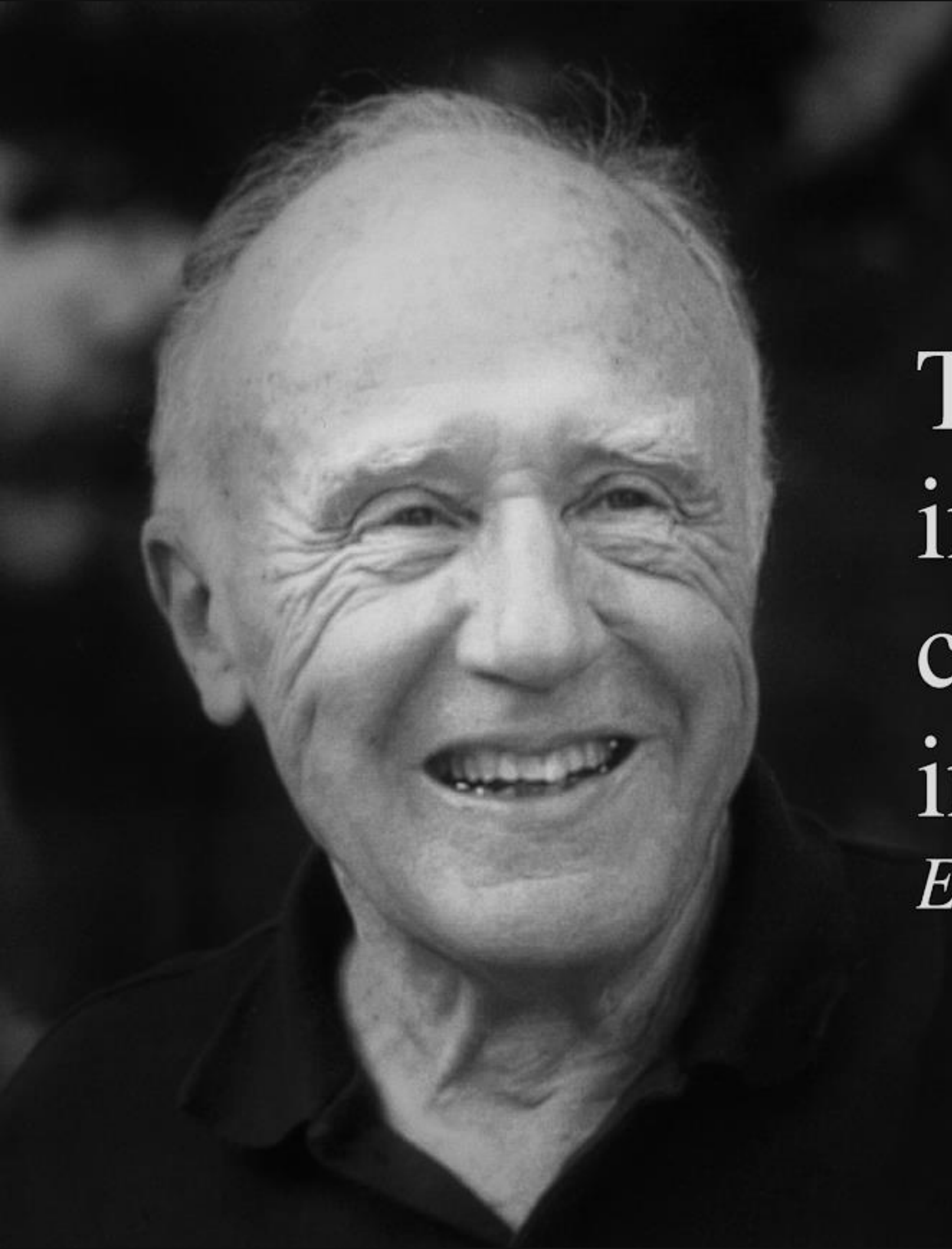
$$x(5) = 2.1924739798976205$$
$$y(5) = 0.07435927584981447$$
$$z(5) = 23.97909183339912$$



“Two states differing by imperceptible amounts may eventually evolve into two considerably different states ... If, then, there is any error whatever in observing the present state — and in any real system such errors seem inevitable — an acceptable prediction of an instantaneous state in the distant future may well be impossible.... In view of the inevitable inaccuracy and incompleteness of weather observations, precise very-long-range forecasting would seem to be nonexistent.”

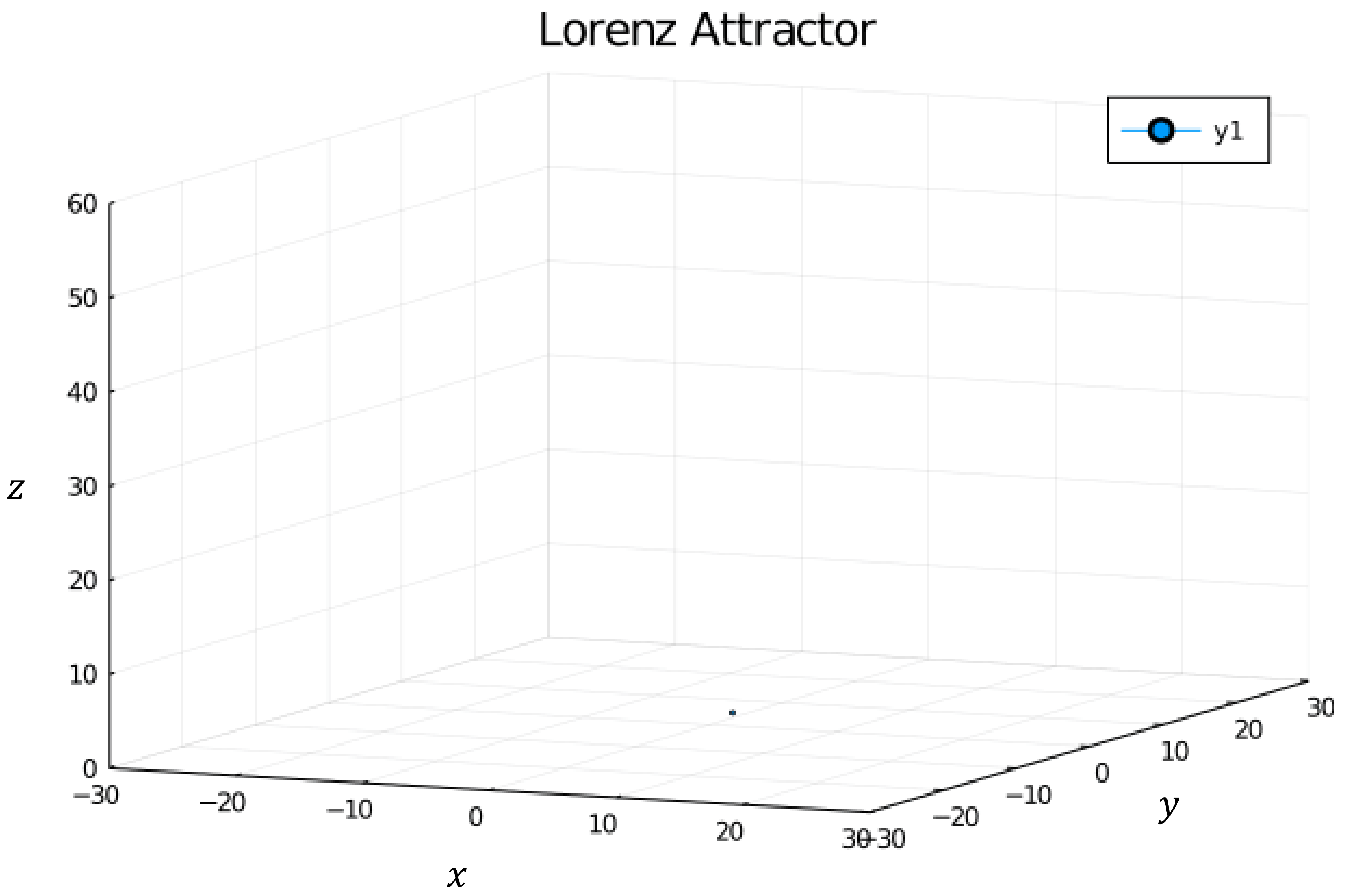
•

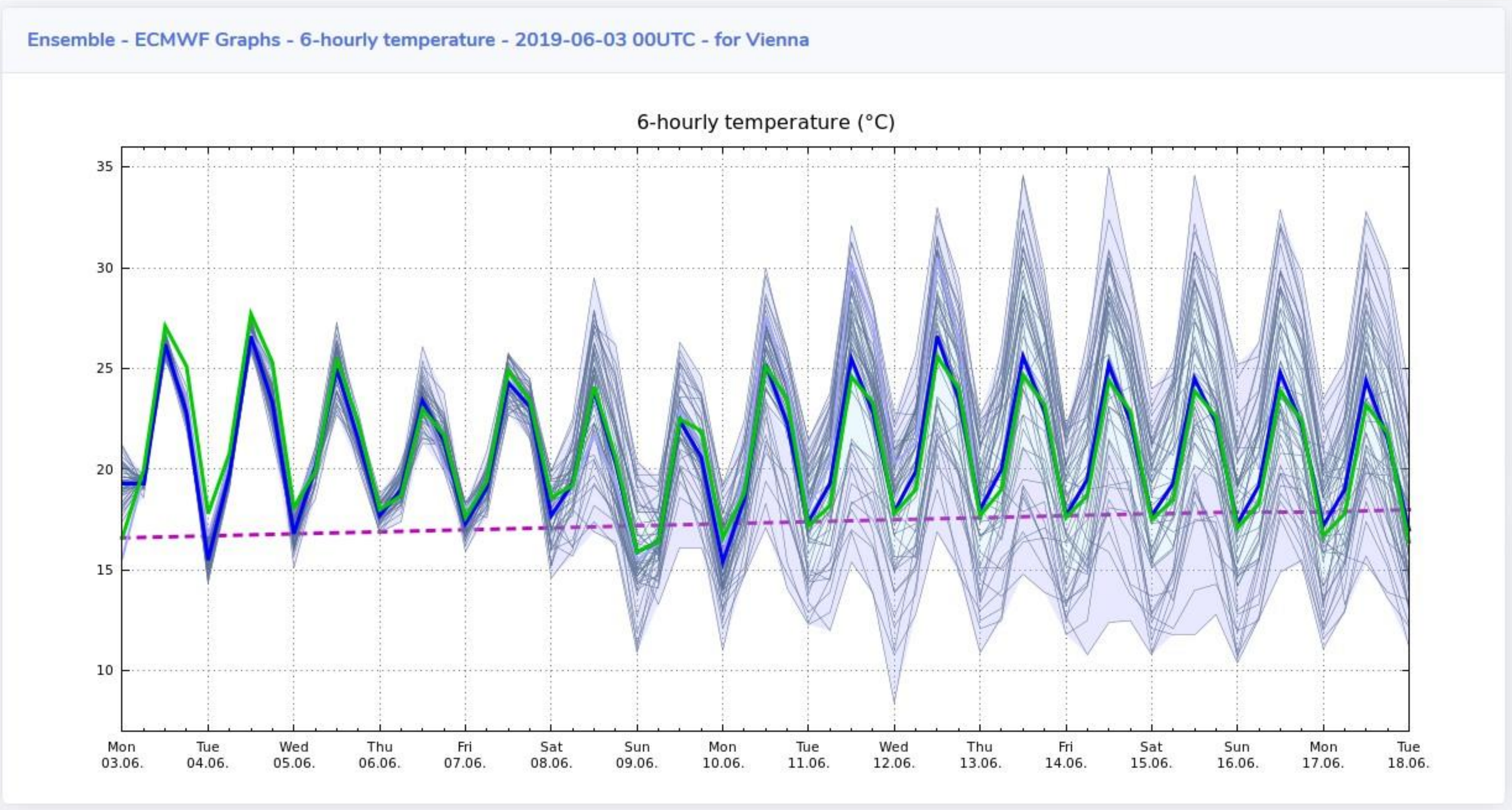
Edward Norton Lorentz
"Deterministic Nonperiodic Flow"
Journal of the Atmospheric Sciences (1963)



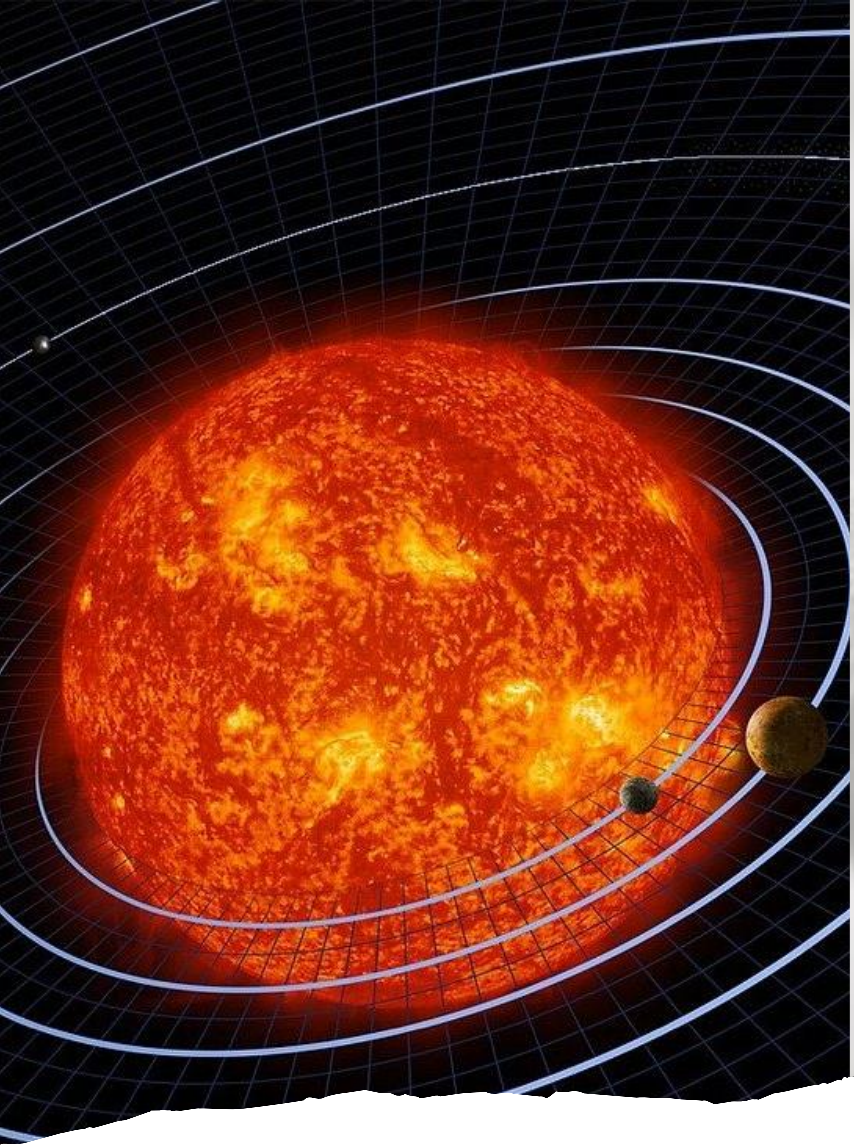
The flap of a butterfly's wings
in Brazil
can set off a tornado
in Texas.

*Edward Lorenz*

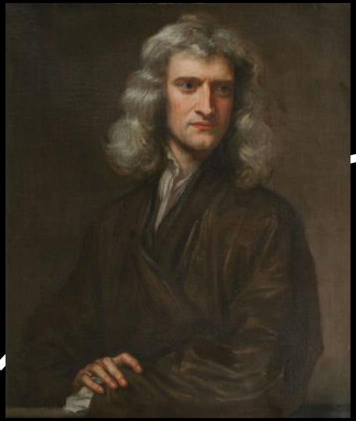

Lorenz Attractor
y1
z
x
y
60
50
40
30
20
10
0
−30
−20
−10
0
10
20
30
−30
−20
−10
0
10
20
30



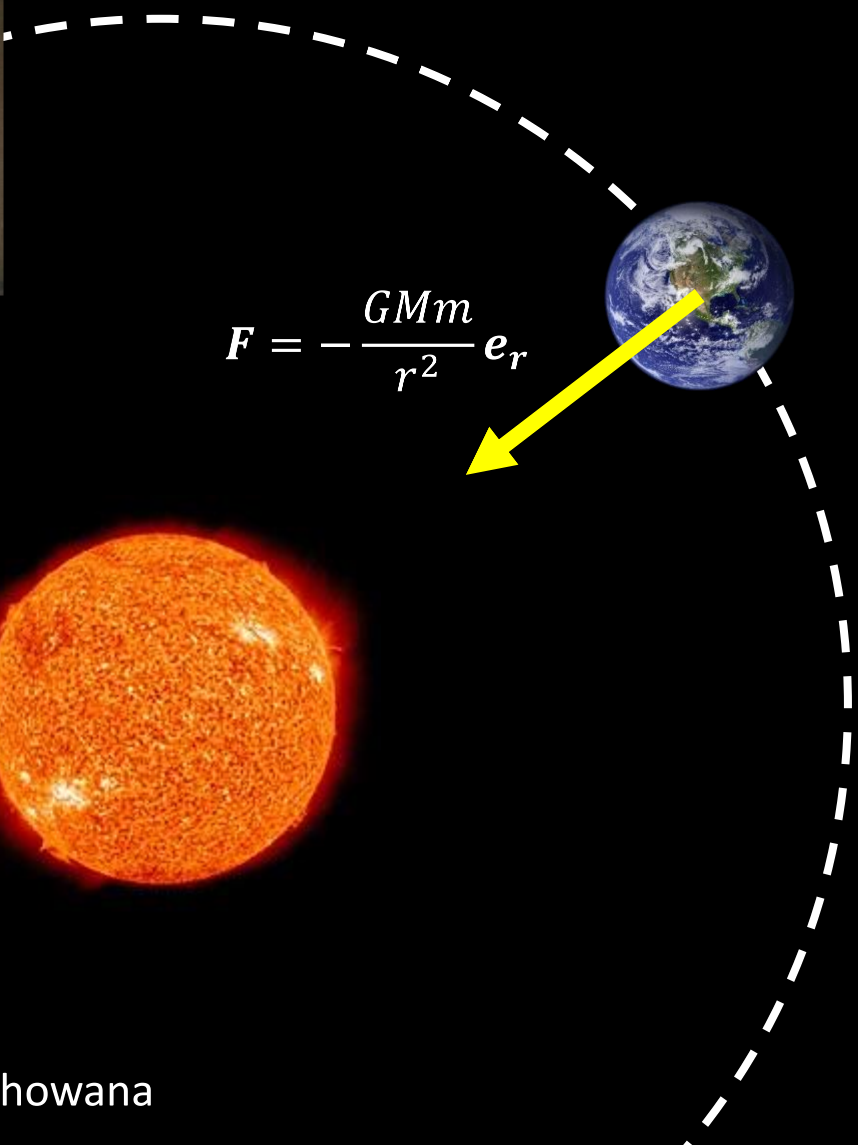

**Źródło:** https://www.meteopower.com/info/ensemble-forecast



# PRZYKŁADY UKŁADÓW CHAOTYCZNYCH



Sir Isaac Newton
(1642 – 1726/27)



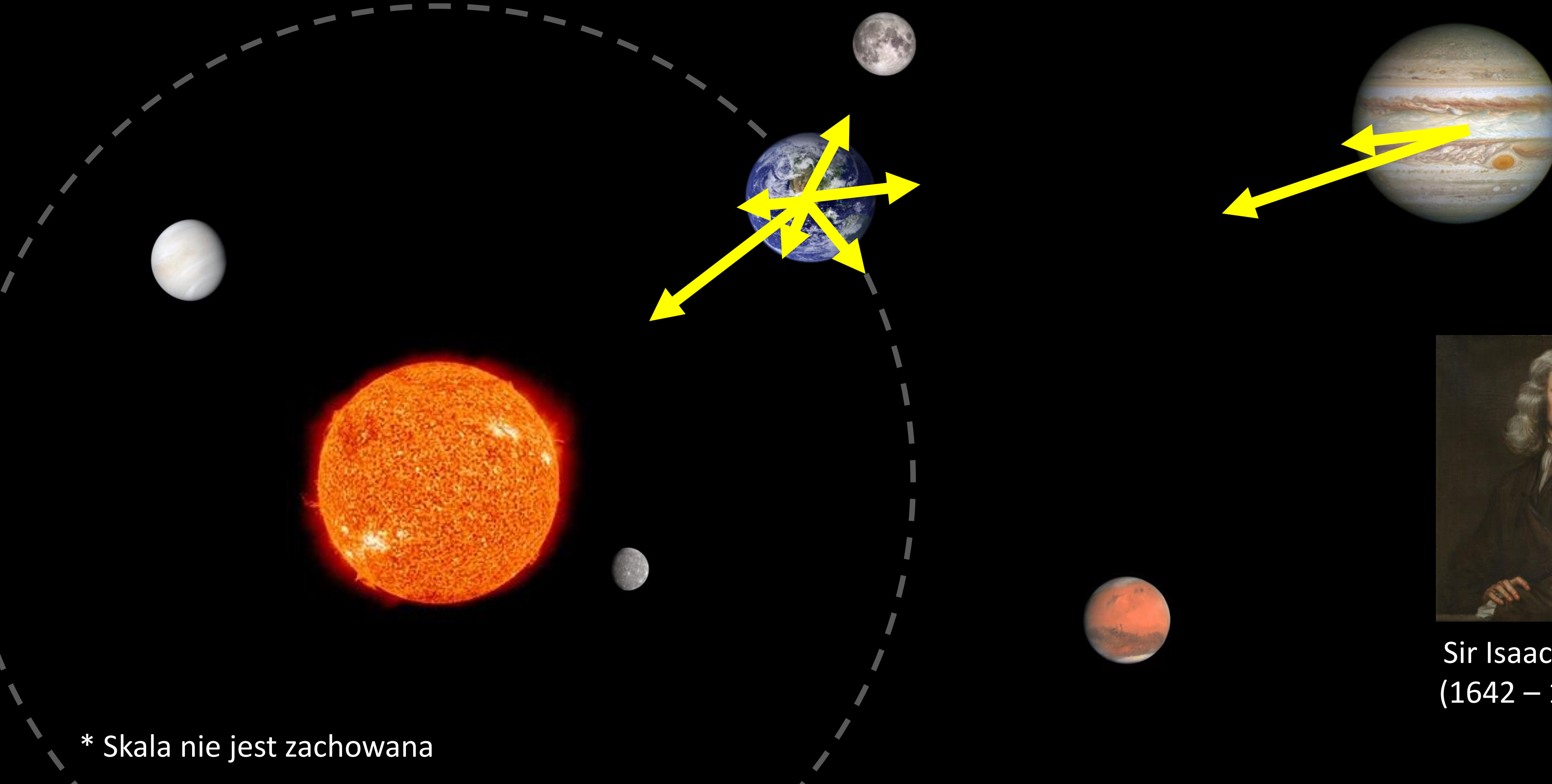
$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e_r}$$

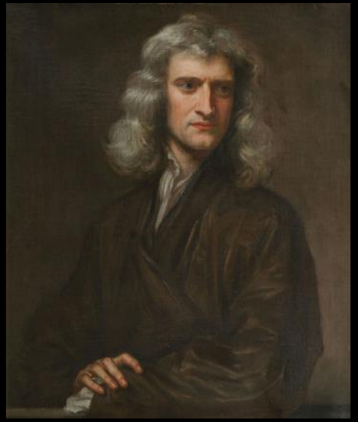
**Pierwsze Prawo Keplera**

Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po orbicie w kształcie elipsy, w której w jednym z ognisk jest Słońce.

Johannes Kepler
(1571 – 1630)

* Skala nie jest zachowana





Sir Isaac Newton
(1642 – 1726/27)

* Skala nie jest zachowana

Oscar II
(1829 – 1907)

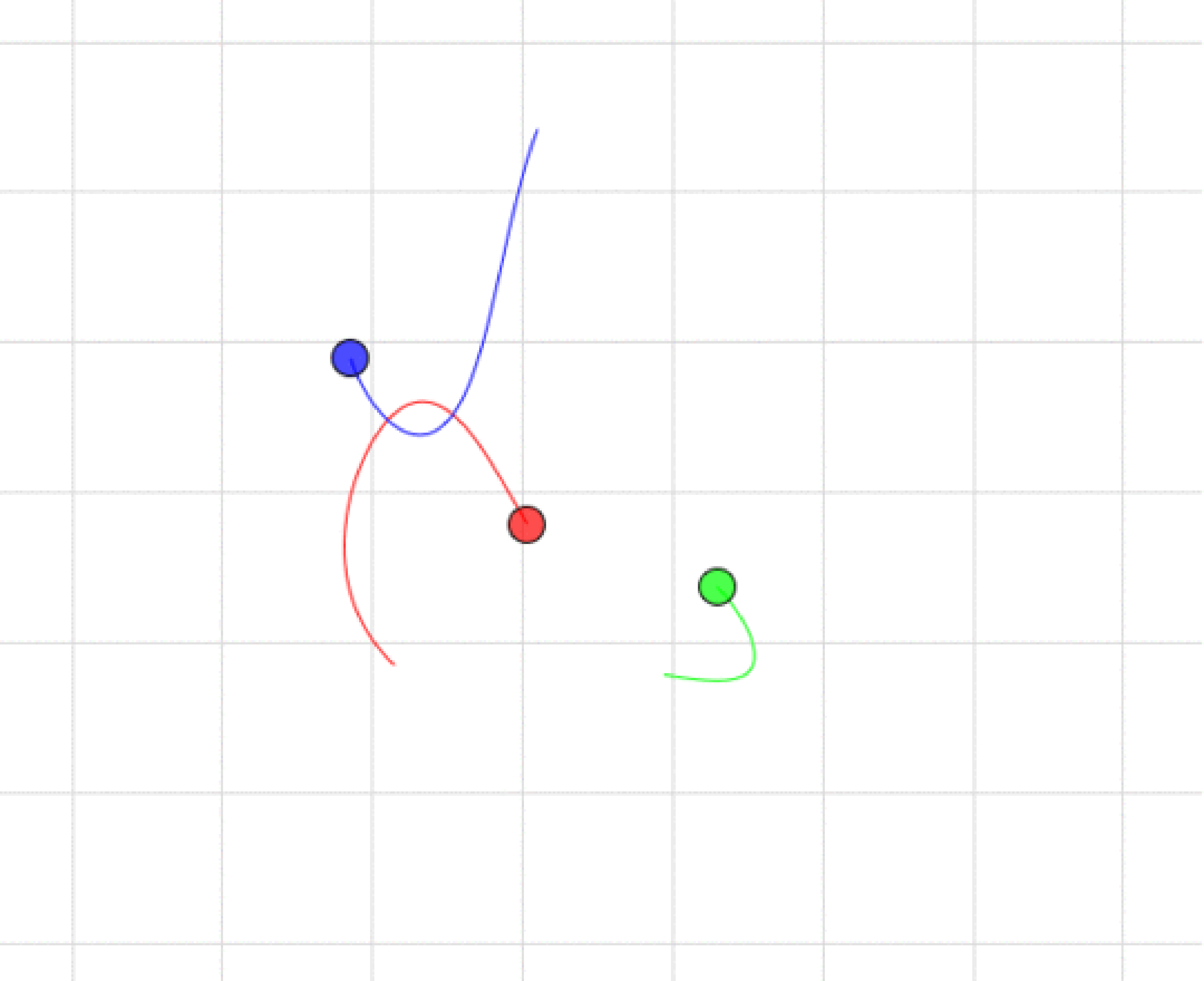
**1687** **Sir Issac Newton** w swoim słynnym dziele “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” sformułował problem trzech ciał.

**1887** W 60-siątą rocznicę swoich urodzin szwedzki król **Oscar II** ufundował nagrodę dla osoby, która rozwiąże ten problem.

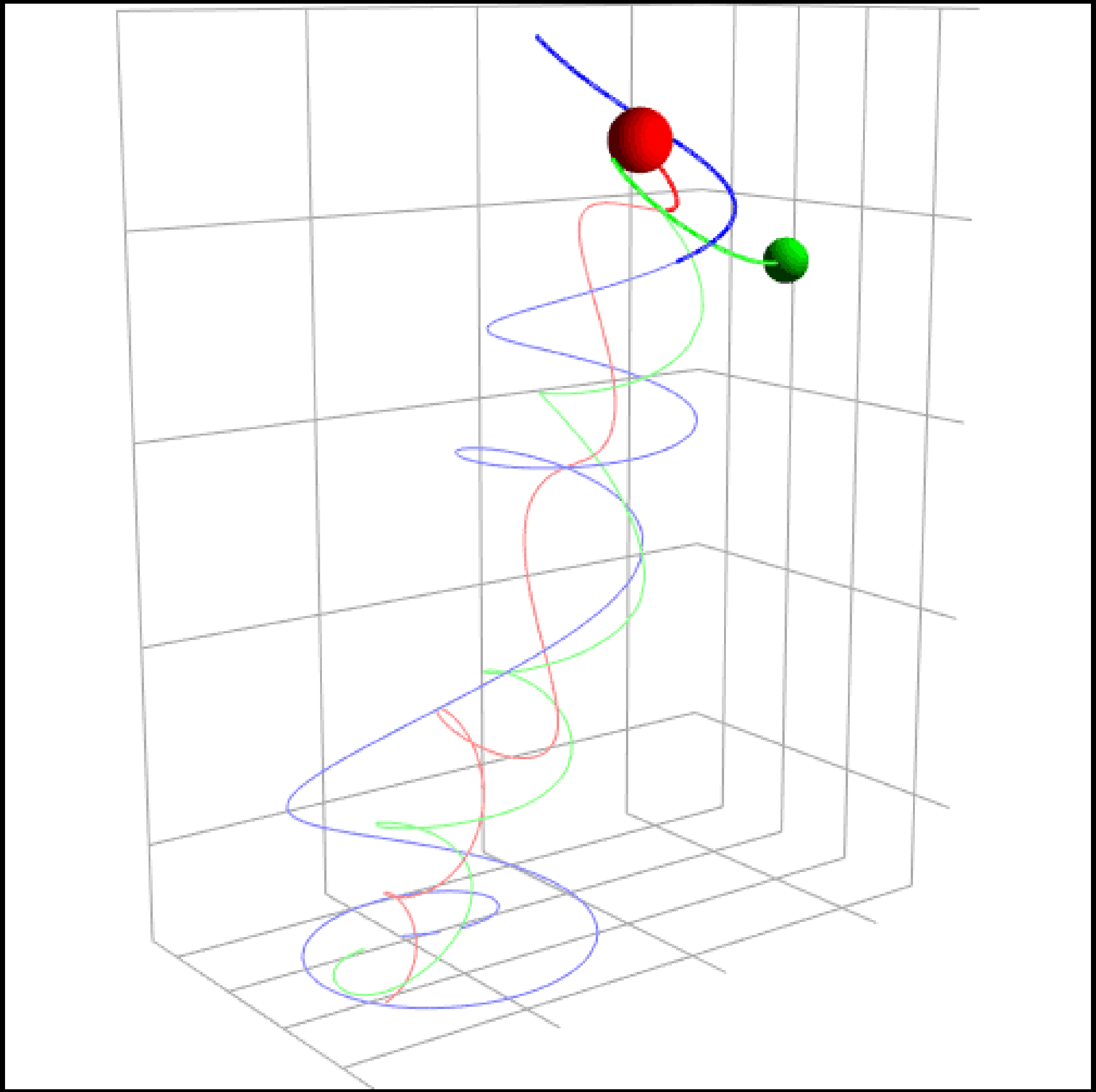
**1889** Nagroda została przyznana **Henri Poincaré**, który doszedł do wniosku, że nie można zapisać rozwiązania korzystając ze standardowych równań algebraicznych.

Sir Isaac Newton
(1642 – 1726/27)

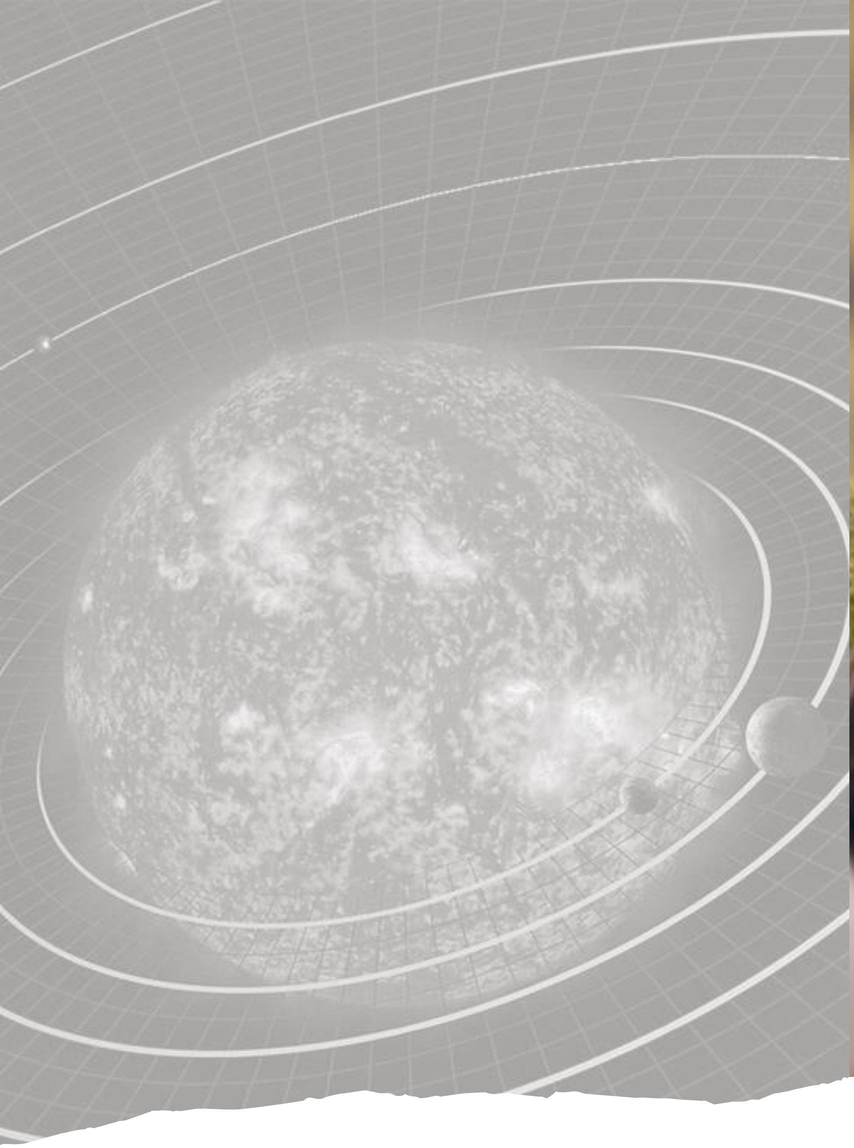
Jules Henri Poincaré
(1854 –1912)



**Źródło:** https://fouriestseries.tumblr.com/post/83838450432/planar-three-body-problem

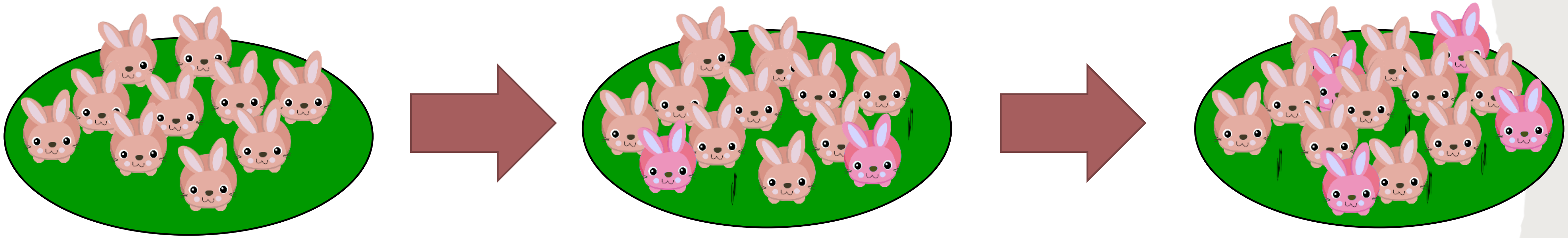


**Źródło:** https://fouriestseries.tumblr.com/post/85569734683/three-body-problem-in-3d



# PRZYKŁADY UKŁADÓW CHAOTYCZNYCH

# Przypomnijmy sobie równanie logistyczne



$n_0$

$n(t)$

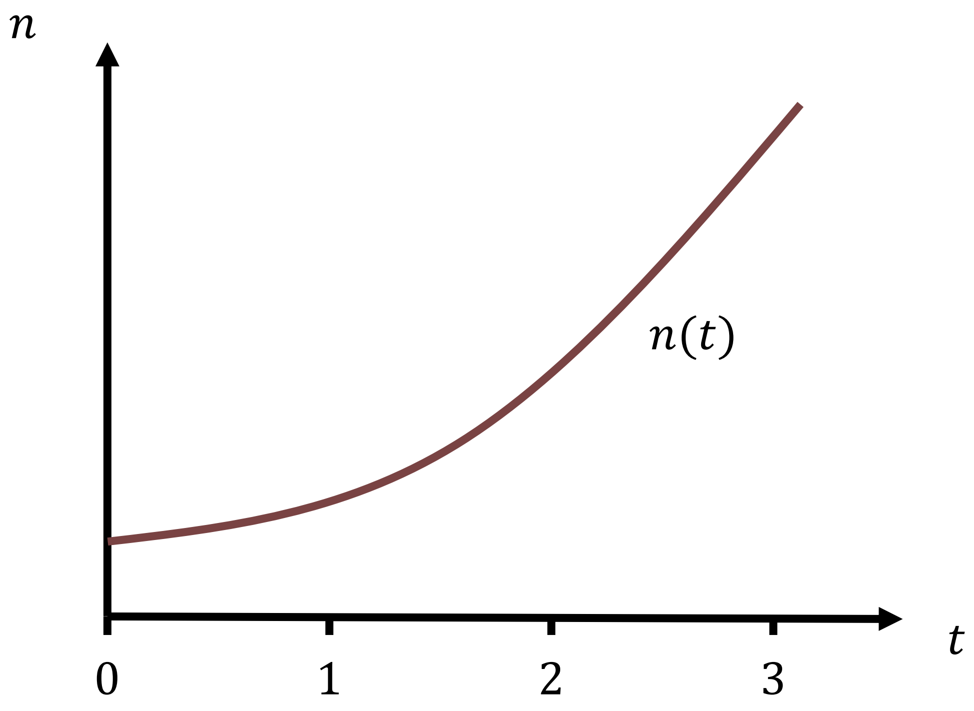
Im więcej królików tym większa śmiertelność.

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

# Modyfikacja:

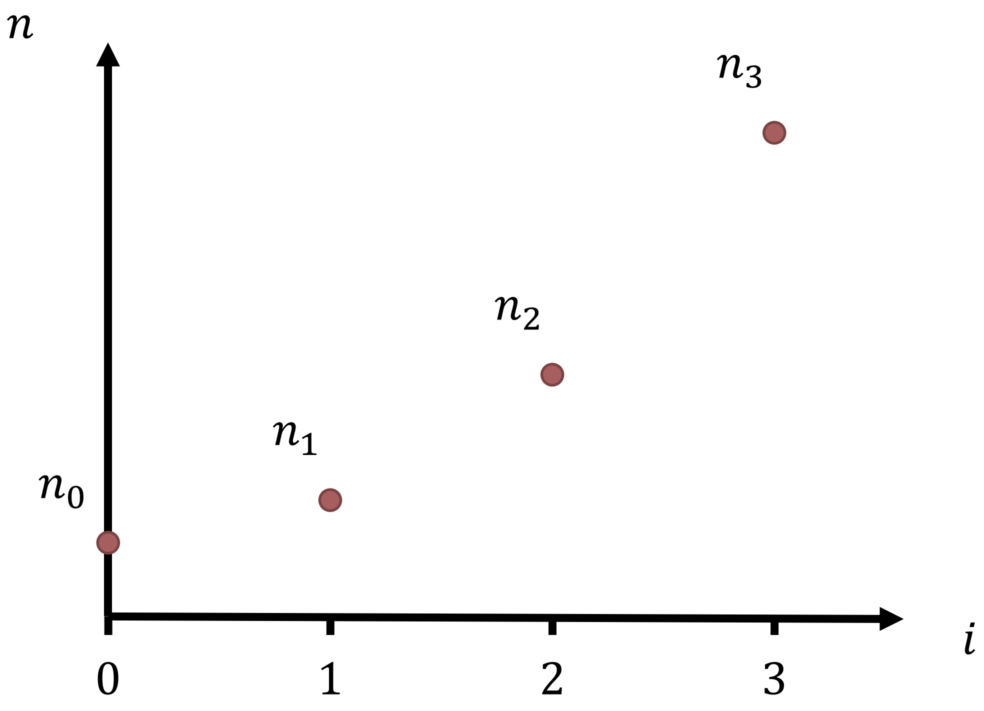
Pokolenia ciągłe

$$\frac{dn}{dt} = k \cdot n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$




Pokolenia nieciągłe

$$n_i = k \cdot n_{i-1} \cdot (1 - n_{i-1})$$



# Zbadajmy własności modelu dyskretnego

$$n_i = k \cdot n_{i-1} \cdot (1 - n_{i-1})$$

Najpierw znajdźmy stany stacjonarne: $$n^* = k \cdot n^* \cdot (1 - n^*)$$

Pierwszy stan stacjonarny:

$$n^* = 0$$

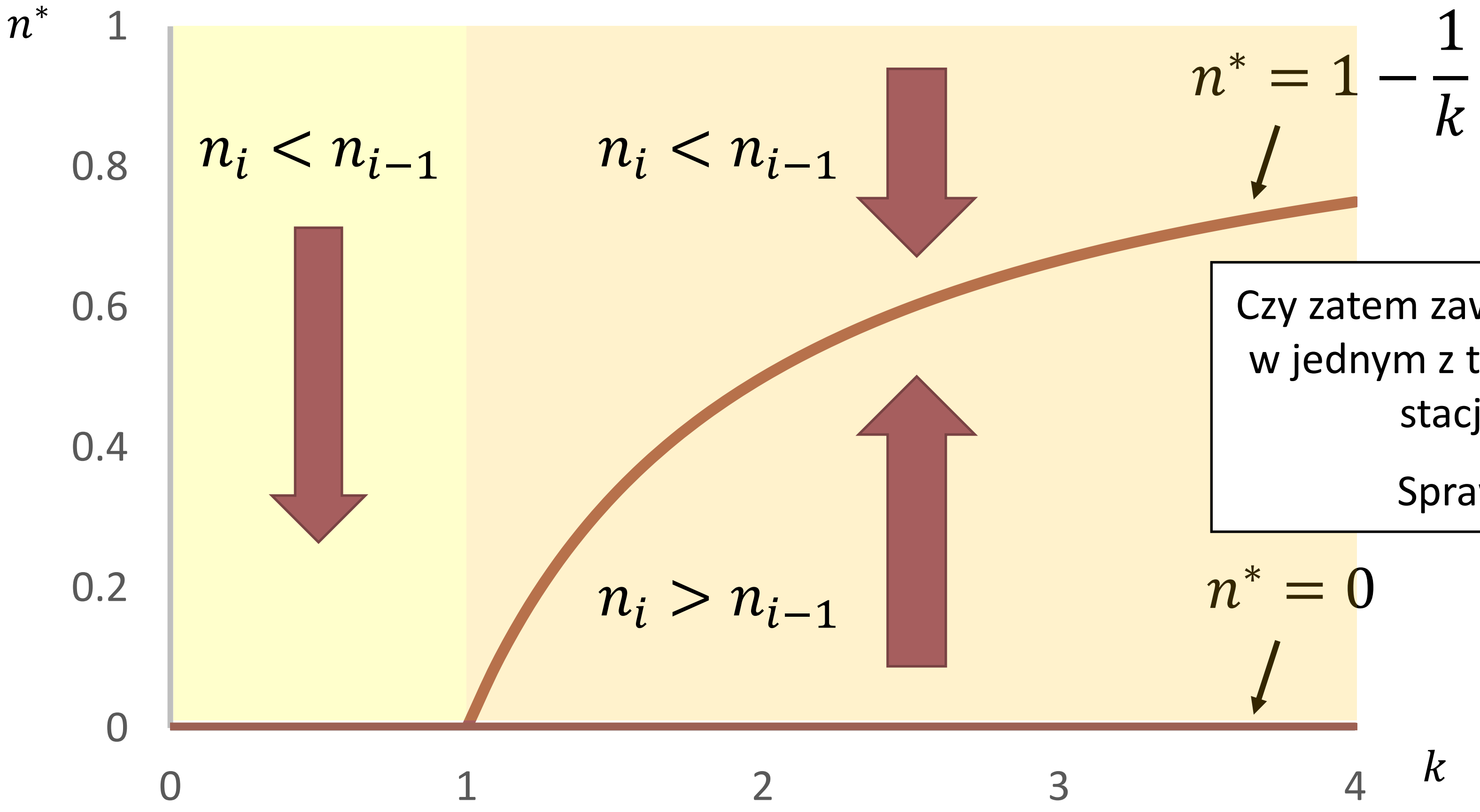
Drugi stan stacjonarny:

$$1 = k \cdot (1 - n^*)$$

$$\frac{1}{k} = 1 - n^*$$

$$n^* = 1 - \frac{1}{k}$$

$$n_i = k \cdot n_{i-1} \cdot (1 - n_{i-1})$$




Czy zatem zawsze znajdziemy się w jednym z tych dwóch stanów stacjonarnym?

Sprawdźmy to!

# Implementacja w Pythonie

$$n_i = k \cdot n_{i-1} \cdot (1 - n_{i-1})$$

Parametry symulacji

```
n0 = 1
k = 0.8
n_krok = 100
```

Utworzenie listy, do zapisywania wartości $n_i$

```
n = n_krok * [0]
n[0] = n0
```

Iteracyjne obliczanie wartości $n_i$

```
for i in range(1, n_krok+1)
  n[i] = k*n[i-1]*(1-n[i-1])
```

Rysowanie wyników symulacji

```
i = range(n_krok+1)
plt.plot(t,n)
```

Sprawdźmy co dostaniemy dla:

$k = 0.8$

$k = 2$

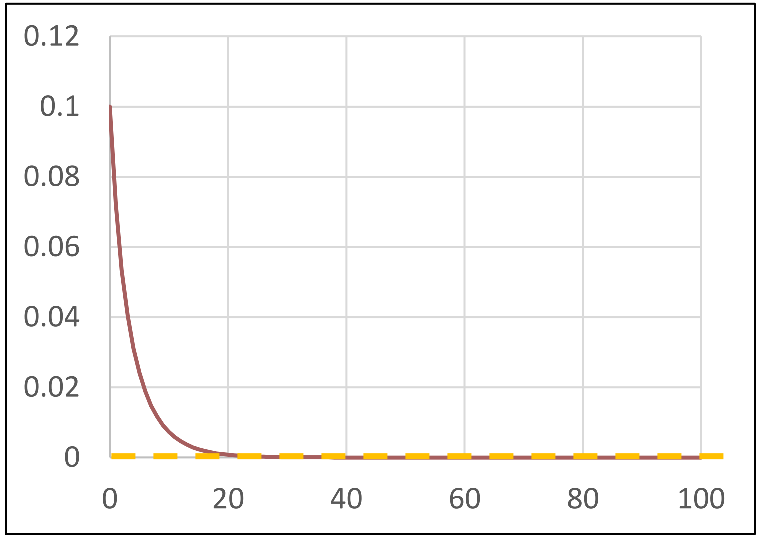
$k = 3.2$

$k = 3.5$

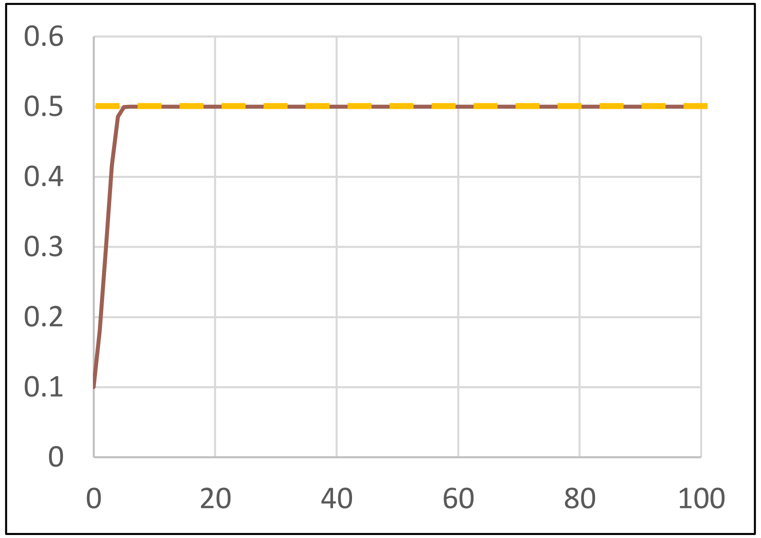
$k = 3.55$

$k = 3.6$

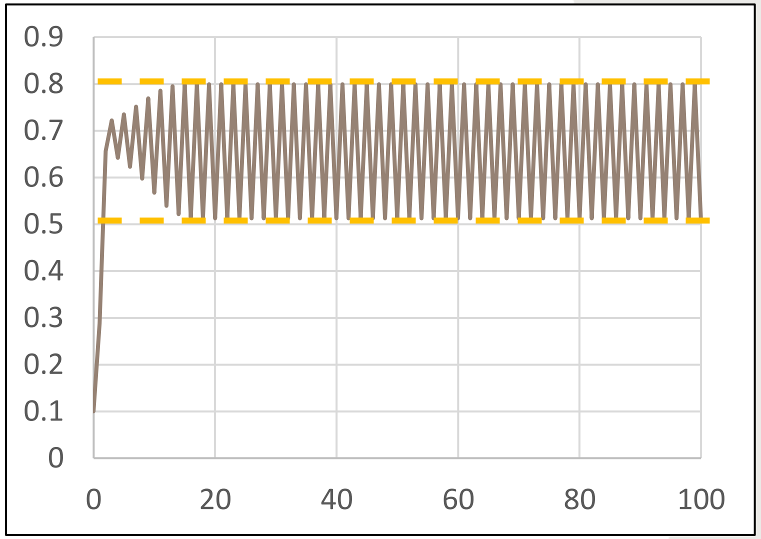
$k = 0.8$



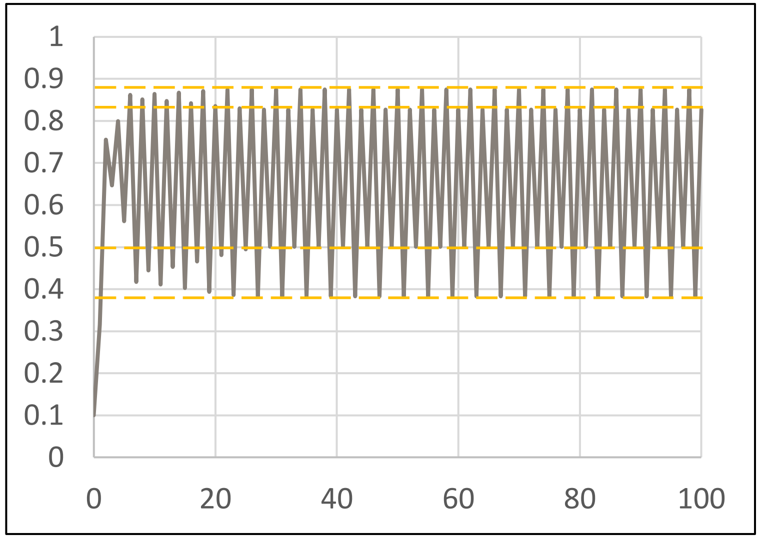

$k = 2$



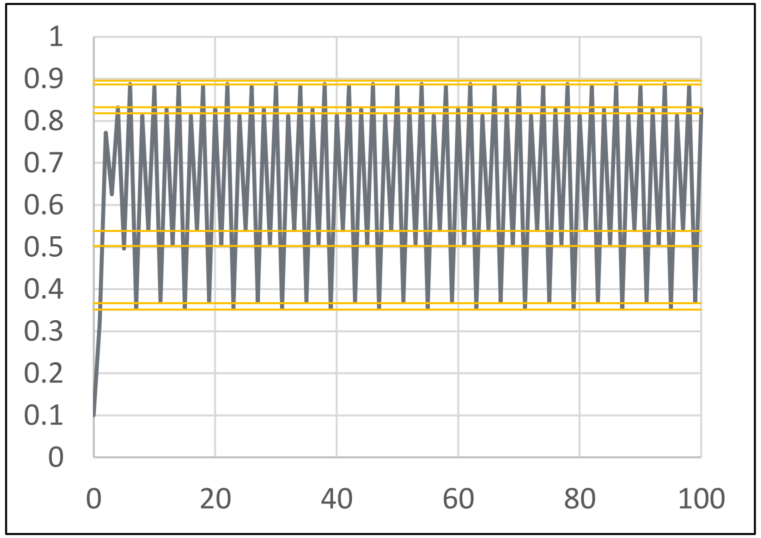

$k = 3.2$



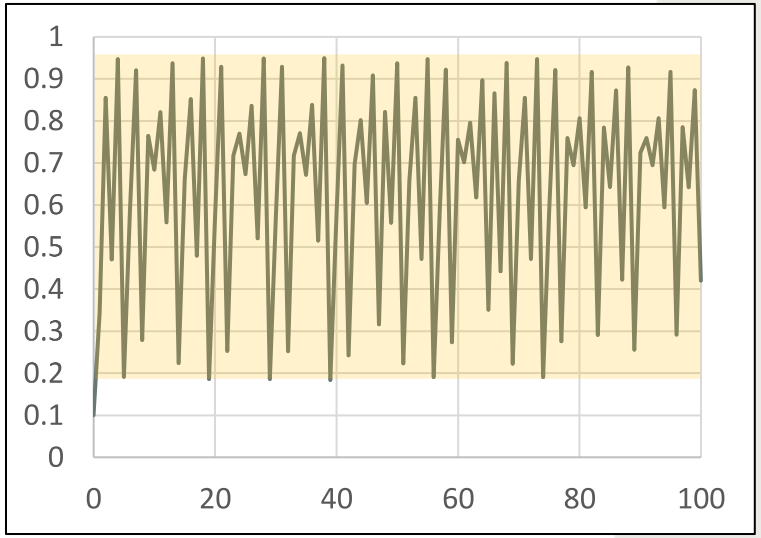

$k = 3.5$



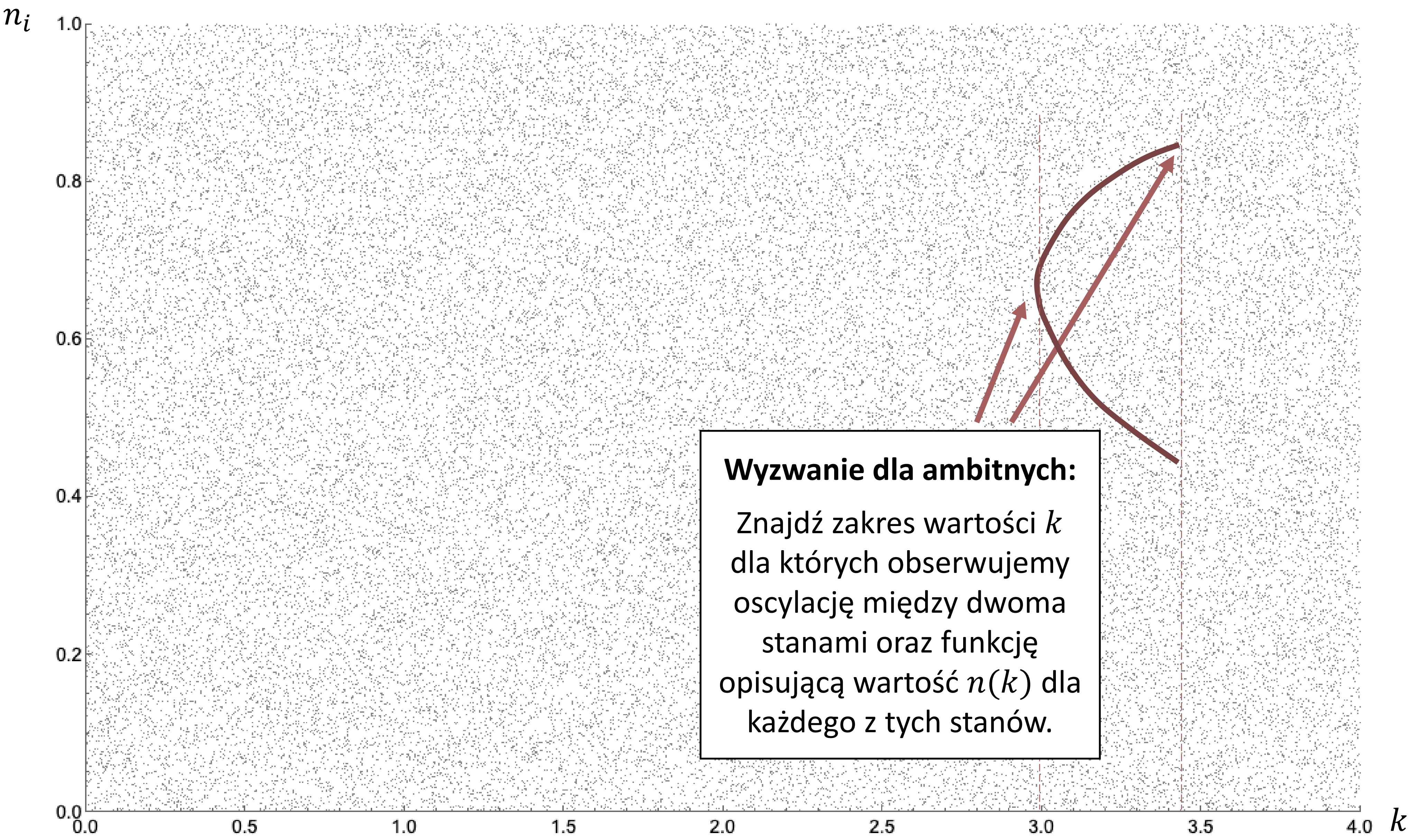

$k = 3.55$




$k = 3.6$



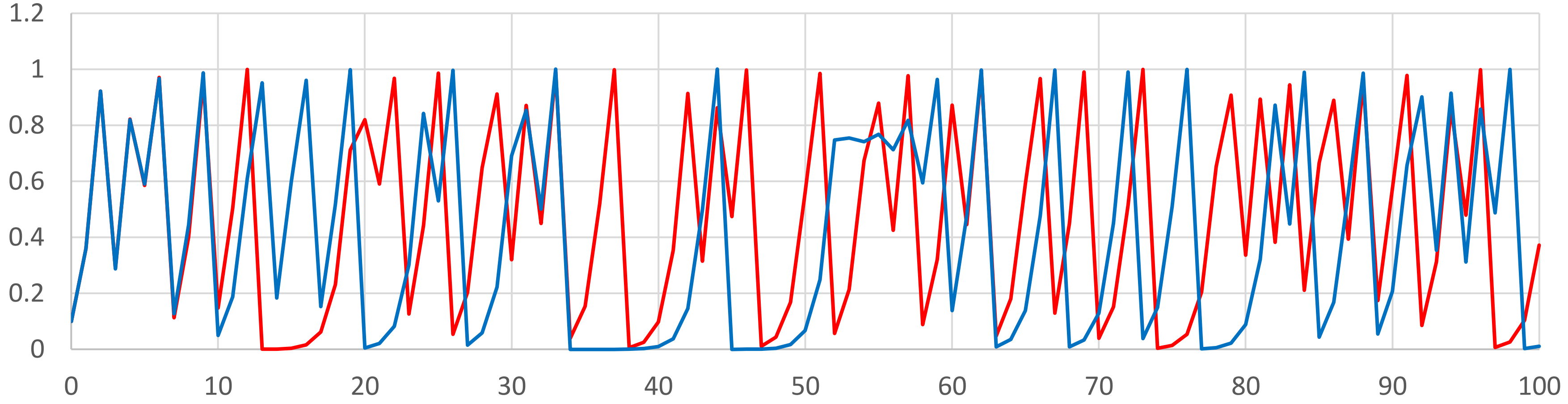
$$n_i = k \cdot n_{i-1} \cdot (1 - n_{i-1}) \qquad i = 0$$




**Wyzwanie dla ambitnych:**

Znajdź zakres wartości $k$ dla których obserwujemy oscylację między dwoma stanami oraz funkcję opisującą wartość $n(k)$ dla każdego z tych stanów.

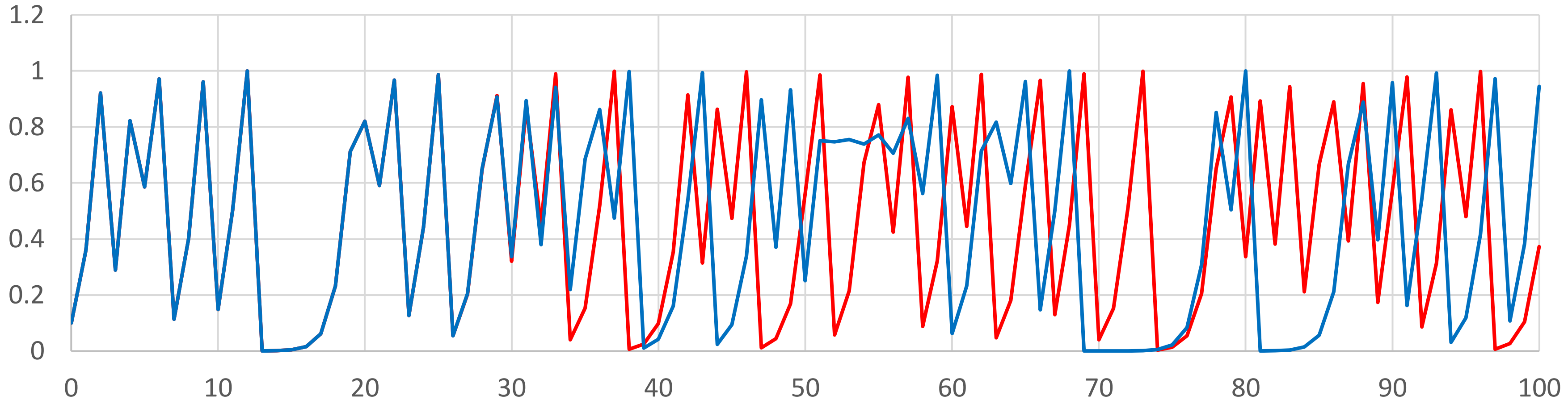
# Zbadajmy podatność na warunki początkowe




$k = 4$

$n_0 = 0.1$

$n_0 = 0.10001$




$k = 4$

$n_0 = 0.1$

$n_0 = 0.10000000001$

# Podsumowanie wykładu

- Nie wszystkie układy dynamiczne są przewidywalne, np. pogoda czy układy ciał niebieskich.
- Układy chaotyczne są bardzo wrażliwe na stan początkowy – dwa niemal identyczne układy mogą zupełnie inaczej wyewoluować w czasie.
- Układy takie ani nie dążą do stanu stacjonarnego ani nie tworzą zamkniętych orbit.
- Ciekawym układem jest dyskretna wersja równania logistycznego, która przejawia różne zachowania w zależności od współczynnika reprodukcji.