Jak modelować epidemię?
3, 4. Układy dynamiczne
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisali: Piotr Morawiecki i Krzysztof Lasocki
zadania pochodzą z różnych źródeł

kwiecień 2023

1 Układy dynamiczne z jedną zmienną

1.1 Podsumowanie piątego wykładu

Układ dynamiczny jest to model matematyczny rzeczywistego zjawiska przyrody, którego ewolucja jest wyznaczona jednoznacznie przez stan początkowy; najczęściej jest opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych, zwanym równaniem stanu.

Pierwszym przykładem układu dynamicznego, który poznaliśmy na wykładzie jest model wzrostu populacji:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = kn \tag{1}$$

Gdzie $n(t)$ to wielkość populacji (np. bakterii lub królików) w czasie t, a parametr k to stała opisująca tempo wzrostu populacji. Rozwiązaniem tego równania jest **funkcja** $n(t)$ (w odróżnieniu od równań znanych z lekcji matematyki, w których niewiadoma jest **liczbą**). Nauczyliśmy się znajdować rozwiązania różniczkowe na dwa sposoby:

1. **analitycznie** - poprzez znalezienie (np. przez zgadnięcie) funkcji matematycznej, która spełnia to równanie,

2. **numerycznie** - poprzez przybliżenie rozwiązania równania, sprawdzając jak zmienia się wartość funkcji w kolejnych *krokach czasowych*

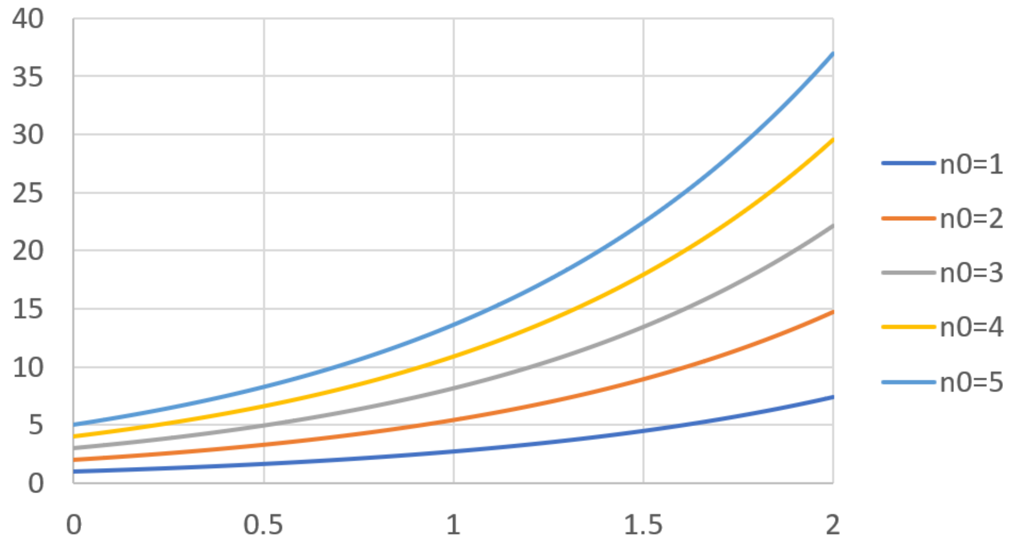
Podczas ćwiczeń z matematyki nauczymy się rozwiązywać równania i badać ich własności analitycznie, a na laboratoriach komputerowych nauczymy się rozwiązywać je numerycznie.

Na przykład pokażmy, że rozwiązaniem równania (1) jest funkcja $n(t) = n_0 e^{kt}$. Sprawdzamy to obliczając lewą (L) i prawą (P) stronę równania:

$$L = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n_0 e^{kt}\right) = n_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{kt}\right) = n_0 k e^{kt}$$

$$P = kn = n_0 k e^{kt}$$

Jak widać $L = P$ dla dowolnej wartości stałej n_0. Jest to tzw. ogólne rozwiązanie **równania różniczkowego**, które charakteryzuje się istnieniem takiej dowolnej stałej. Jej wartość zależy od **warunku początkowego**, czyli wartości $n(t)$ w czasie $t = 0$. W naszym przykładzie jest to początkowa wielkość populacji $n(0) = n_0$. Przykładowe rozwiązania dla $k = 1$ i różnych wartości n_0 przedstawiam na Rysunku (1). Rozwiązanie, które spełnia zadany warunek początkowy nazywamy **rozwiązaniem szczególnym**.



Rysunek 1: Rozwiązania szczególne równania (1)

1.2 Zadania do piątego wykładu

Zadanie 1

Prędkość ciała $v(t)$, na które działa siła oporu powietrza jest opisane równaniem różniczkowym:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

gdzie k to jest stały współczynnik oporu powietrza.

1. Pokaż, że rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$v(t) = \frac{1}{C + kt}$$

   gdzie C to dowolna stała.

2. Prędkość początkowa ciała wynosi $v(0) = 10\mathrm{ms}^{-1}$, a współczynnik $k = 0.01\mathrm{m}^{-1}$. Określ wartość stałej C, a następnie oblicz prędkość ciała w czasie $t = 10\mathrm{s}$ i $30\mathrm{s}$.

3. Naszkicuj wykres $v(t)$. Opisz co dzieje się z prędkością jak $t \to \infty$.

Zadanie 2 (zagadka kryminalna)

Do opisu procesu stygnięcia często wykorzystywanym modelem jest tzw. prawo stygnięcia Newtona. Zgodnie z nim szybkość utraty ciepła jest proporcjonalna do różnicy temperatury między obiektem a temperaturą otoczenia. Matematycznie można je wyrazić jako:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T_0 - T) \tag{2}$$

gdzie $T(t)$ oznacza temperaturę obiektu w czasie t, T_0 to temperatura otoczenia, a k to pewna stała.

1. Wykaż, że rozwiązaniem równania jest funkcja:

   $$T(t) = T_0 + Ce^{-kt}$$

   gdzie C to dowolna stała. Znajdź jej wartość przy założeniu, że w czasie $t = 0$ temperatura ciała wynosiła $T(0) = T_{\text{start}}$.

2. Naszkicuj wykres funkcji $T(t)$.

3. Policja odnalazła ciało ofiary morderstwa o godzinie 1:00 w nocy i zmierzyła jego temperaturę, która wynosiła wówczas 29°C. Po godzinie ponownie przeprowadzono pomiar i okazało się, że temperatura ciała spadła do 27°C. Przez całą noc temperatura powietrza była stała i wynosiła 21°C. Oszacuj czas zgonu przy założeniu, że ciało miało wówczas standardową temperaturę ciała człowieka (37°C).

   Wskazówka: Zacznij od oszacowania stałej k.

Zadanie 3

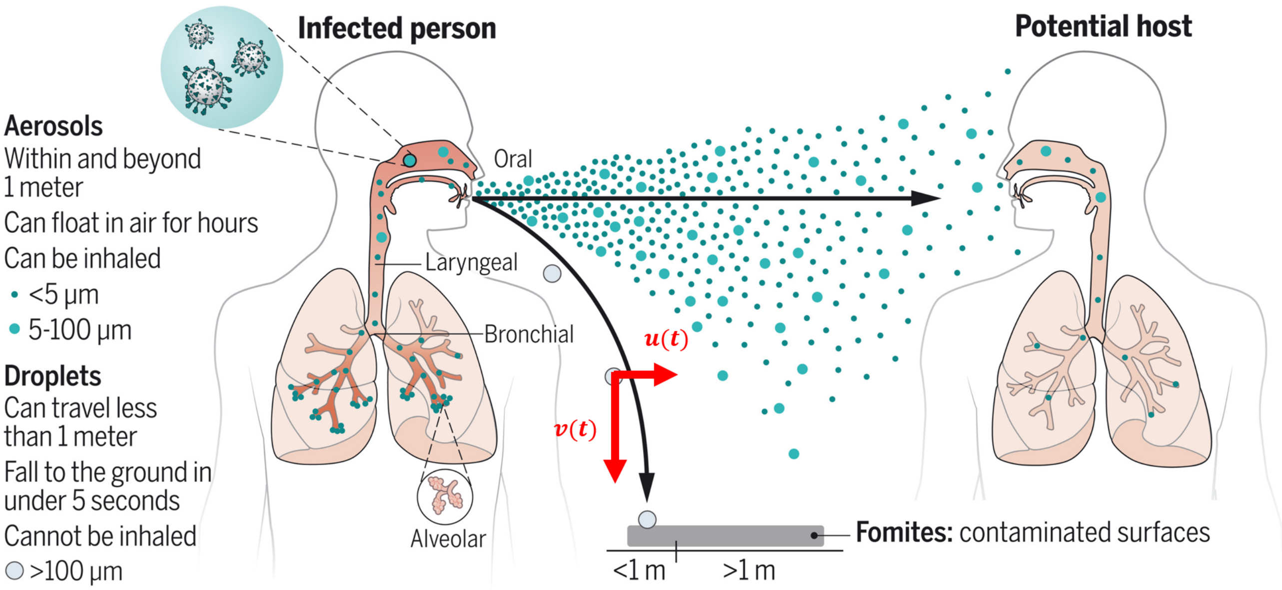
W tym zadaniu spróbujemy napisać własne proste układy dynamiczne modelujące rzeczywiste zjawiska.

1. Napisz równanie na zmianę populacji państwa w czasie uwzględniając liczbę narodzin i zgonów. Jak można rozbudować ten model przy założeniu stałego napływu imigrantów w czasie?

2. Napisz równanie opisujące szybkość zmiany stężenia dymu papierosowego w zamkniętym pomieszczeniu przy założeniu, że w pomieszczeniu znajdują się palacze, a powietrze jest wymieniane z otoczeniem poprzez wentylację.

3. Napisz równanie opisujące temperaturę wody w zamkniętym garnku powoli podgrzewanego na kuchence przy założeniu, że część ciepła ucieka przez ścianki.

Zadanie dodatkowe dla ambitnych: Spróbuj znaleźć rozwiązanie dla wybranych z powyższych modeli. Wykonanie tego zadania może być łatwiejsze po rozwiązaniu innych zadań z tego zestawu.



Rysunek 2: Ilustracja rozprzestrzeniania się kropli. Pochodzi z pracy "Airborne transmission of respiratory viruses" opublikowanej w Science (`https://www.science.org/doi/10.1126/science.abd9149`), przy czym czerwone strzałki przedstawiające składowe prędkości kropli zostały naniesione przez nas.

Zadanie 4 (dystans społeczny)

W niniejszym zadaniu poznamy prosty model, który określa jaki dystans powinny utrzymać osoby, żeby uniknąć zarażenia się wirusem Sars-Cov-2. Wirus ten przenosi się głównie drogą kropelkową, a zgodnie z badaniami[1] największe jego stężenie zaobserwowano w kroplach o średnicy powyżej 0.1mm (wirus też przenoszony jest w dużo mniejszych kroplach, ale w znacznie mniejszym stężeniu). Na lot tych kropli wpływają dwie siły, grawitacja (działająca w dół) i opór powietrza (skierowany przeciwnie do prędkości kropli).

Opiszmy prosty model opisujący jak prędkość kropli zmienia się w trakcie kaszlenia. Składa się ona z dwóch składowych, pionowej $v(t)$ i poziomej $u(t)$ (patrz Rysunek 2). Zmianę prędkości kropel opisują następujące równania[2]:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -ku$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - kv$$

gdzie $g \approx 9.81\mathrm{ms}^{-2}$ to siła grawitacji, a k to stały współczynnik oporu powietrza. Początkowo zakładamy, że krople mają wyłącznie prędkość poziomą u_0, tzn. $v(0) = 0$, a $u(0) = u_0$.

[1]**źródło:** Chia C. Wang i inni. "Airborne transmission of respiratory viruses." Science 373.6558 (2021)

[2]Jest to tak zwany model Maxeya-Rileya, i został on wykorzystany w kontekście roznoszenia się wirusów SARS-CoV-2, m.in. przez Avshaloma Offnera i Jacquesa Venneste w pracy pt. "Lifetime of respiratory saliva droplets" (`https://arxiv.org/pdf/2111.06227.pdf`), choć autorzy uwzględnili również proces parowania wody, z której składa się kropla śliny. My jednak na potrzeby tego ćwiczenia uprościliśmy ten problem.

1. Pokaż, że ogólnymi rozwiązaniami równań są:

$$u(t) = C_1 e^{-kt}$$
$$v(t) = -\frac{g}{k} + C_2 e^{-kt}$$

dobierz tak stałe C_1 i C_2, żeby równania spełniały warunki początkowe, $v(0) = 0$, a $u(0) = u_0$.

2. Prędkość zgodnie z jej definicją opisuje zmianę położenia kropli w czasie, tzn. $x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ oraz $y = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Pokaż, że położenie kropli jest wyrażone równaniami:

$$x(t) = -\frac{C_1}{k} e^{-kt} + C_3$$
$$y(t) = -\frac{g}{k} t - \frac{C_2}{k} e^{-kt} + C_4$$

Przypuśćmy, że kaszląca osoba ma wysokość H. Przyjmijmy zatem, że $x(0) = 0$ i $y(0) = H$ Znajdź wartości C_3 i C_4, które opiszą te warunki początkowe.

3. Krople o średnicy 0.1mm mają współczynnik oporu powietrza w przybliżeniu $k \approx 8\mathrm{s}^{-1}$. Przyjmując, że krople są wykaszliwane z prędkością początkową $u_0 = 10\mathrm{ms}^{-1}$ oszacuj maksymalny dystans jaki one przebędą w kierunku poziomym mierząc od miejsca, gdzie znajduje się osoba kaszląca. Czy wysokość osoby ma tutaj znaczenie? Jak ma się ten wynik do reguły dwóch metrów jaka obowiązywała w trakcie epidemii koronawirusa?

4. Oszacuj maksymalny zasięg kropli w przypadku osoby noszącej maskę. Załóż, że nałożenie maseczki chirurgicznej zmniejsza prędkość wykaszliwanych kropli 2-krotnie[3]. Często można usłyszeć opinie, że maseczki chirurgiczne (bez filtra) nie zmniejszają ryzyka zachorowania. Czy i w jaki sposób opisany model odnosi się do tej krytyki?

Zadanie 5 (ładowanie kondensatora)

Równania różniczkowe mają bardzo ważne zastosowanie w modelowaniu zmian napięcia i natężenia prądu w czasie w obwodach elektrycznych. Rozważmy obwód złożony z baterii (o napięciu ε), opornika (o oporze R), kondensatora (o pojemności C) oraz włącznika (patrz Rysunek 3 poniżej). Celem w tym zadaniu będzie sprawdzenie jak napięcie kondensatora $U_C(t)$ będzie się zmieniać w czasie po zamknięciu obwodu (poprzez przyciśnięcie włącznika).

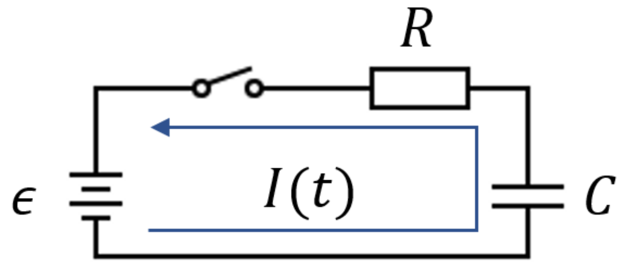
Oznaczmy jako $U_R(t)$ i $U_C(t)$ spadek napięcia odpowiednio na oporniku i kondensatorze w czasie t. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa całkowity spadek napięcia w obwodzie musi być równy napięciu na baterii:

$$\varepsilon = U_R + U_C \tag{3}$$

Zgodnie z prawem Ohma natężenie prądu $I(t)$ przepływającego przez dany opornik można wyrazić jako iloczyn napięcia na danym oporniku i wartości jego oporu. Zatem:

$$I = \frac{U_R}{R} \tag{4}$$

[3]**Na podstawie:** D. Talib and D. Drikakis. “On respiratory droplets and face masks.” Physics of fluids vol. 32,6 (2020)



Rysunek 3: Obwód RC

Z kolei prąd przepływający przez kondensator jest proporcjonalny do jego pojemności oraz szybkości z jaką zmieniamy napięcie prądu (wzór ten otrzymujemy różniczkując po czasie obie strony wzoru $Q = CU_C$ wprowadzanego na lekcjach fizyki, oraz wiedząc, że $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$):

$$I = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Obwód składa się z jednej pętli, więc przez wszystkie elementy układu przepływa ten sam prąd.

1. Wykorzystaj powyższe trzy równania, aby wyprowadzić następujące równanie różniczkowe opisujące zmianę napięcia U_C w czasie:

$$C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_C}{R} + \frac{\varepsilon}{R} \tag{6}$$

2. Załóżmy, że początkowo kondensator był rozładowany, tzn. możemy przyjąć warunek początkowy $U_C = 0$. Spróbuj znaleźć rozwiązanie postaci:

$$U_C(t) = a + be^{-dt}$$

gdzie stałe a, b i d należy wyrazić za pomocą parametrów R, C i ε.

3. Naszkicuj wykres $U_c(t)$.

4. Jeśli $\varepsilon = 12\mathrm{V}$, $R = 100\Omega$ i $C = 10^{-3}\mathrm{F}$ określ:

   (a) napięcie do jakiego kondensator może zostać naładowany,

   (b) po jakim czasie kondensator zostanie naładowany w 99%.

   (c) jaki będzie poziom naładowania kondensatora po upływie czasu $\tau = RC$ sekund?

   W jaki sposób można skrócić czas ładowania kondensatora?

2 Badanie stanów stacjonarnych

2.1 Podsumowanie szóstego wykładu

Czasem możemy dużo dowiedzieć się na temat rozwiązania równania różniczkowego, nawet bez konieczności jego znajdowania. Przydatnym pojęciem są tak zwane **stany stacjonarne**, czyli stany, w których zmienne występujące w naszym równaniu nie zmieniają się w czasie.

Rozpatrzmy równanie logistycznie opisujące wzrost populacji przy ograniczonych zasobach środowiska:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = kn\left(1 - \frac{n}{N}\right) \tag{7}$$

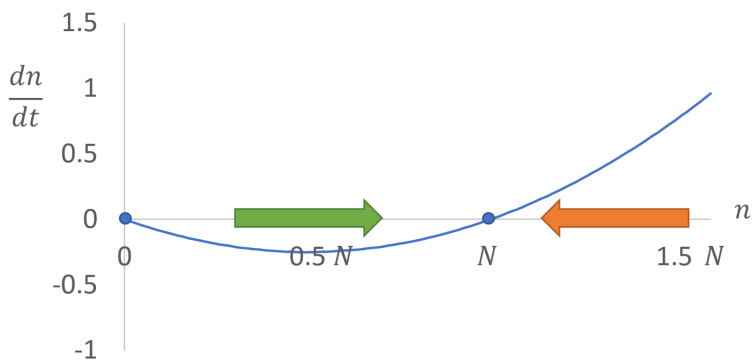
gdzie $n(t)$ to wielkość populacji (np. królików) w czasie t, parametr k opisuje tempo wzrostu populacji, a parametr N reprezentuje zasobność środowiska.

Stan stacjonarny tego układu znajdujemy szukając wartości $n = n^*$, dla których populacja nie zmienia się w czasie $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = 0$, tzn. kiedy:

$$kn^*\left(1 - \frac{n^*}{N}\right) = 0$$

To równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania $n^* = 0$ oraz $n^* = N$.

To, do którego stanu dojdzie nasz układ możemy zbadać za pomocą tzw. **metody graficznej**. Najpierw rysujemy funkcję $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$, a następnie zaznaczamy strzałką kierunek zmiany naszej funkcji (funkcja maleje kiedy $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} < 0$ i rośnie kiedy $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} > 0$).



Zatem możemy wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jeśli będziemy mieli mniej niż N królików to ich populacja będzie rosnąć aż do N.

2. Jeśli będziemy mieli więcej niż N królików to ich populacja będzie spadać aż do N.

3. Jeśli początkowo nie będziemy mieć na łące żadnych królików ($N = 0$) to ich liczba pozostanie równa 0.

Zwróćmy uwagę, że jeśli jesteśmy w stanie stacjonarnym $n^* = N$ to przy małej zmianie populacji królików układ wróci do tego samego stanu równowagi. Taki stan stacjonarny nazywamy **stanem stabilnym**. Natomiast w stanie stacjonarnym $n^* = 0$ nawet mała zmiana populacji królików (np. pojawienie się "pierwszej pary") spowoduje, że układ odejdzie od tego stanu stacjonarnego (populacja królików zacznie rosnąć). Taki stan stacjonarny nazywamy **stanem niestabilnym**.

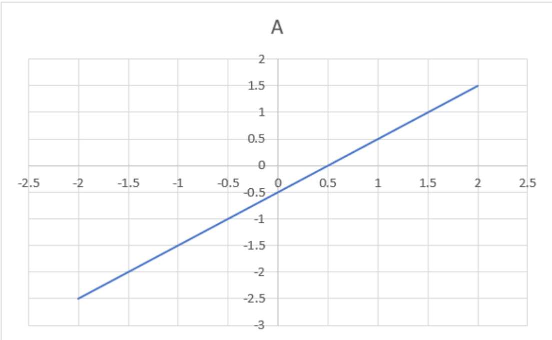
2.2 Zadania do szóstego wykładu

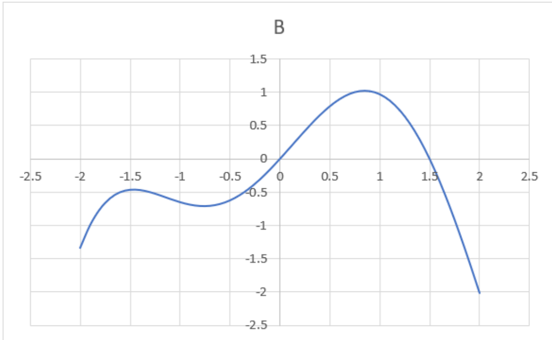
Zadanie 6

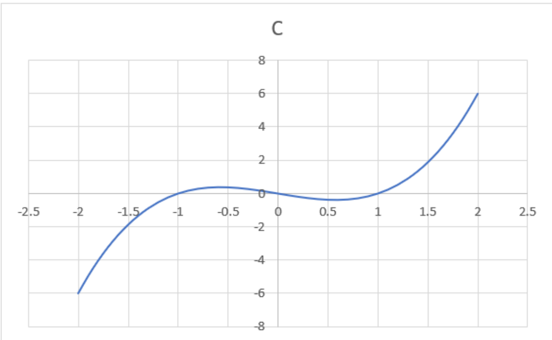
Rozważmy następujące równanie różniczkowe

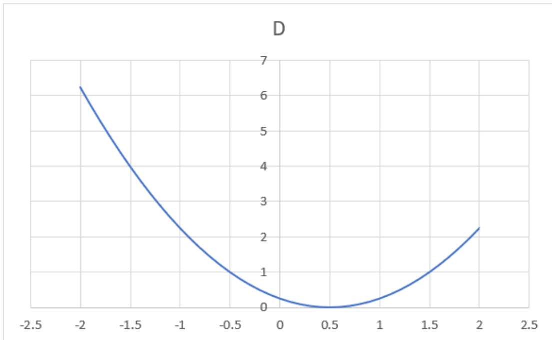
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$$

gdzie funkcja $f(x)$ została przedstawiona na poniższych wykresach (każdy wykres opisuje inne równanie różniczkowe). Dla każdego równania 1) wskaż wszystkie stany stacjonarne, 2) wykorzystaj metodę graficzną do opisania zachowania układu, i 3) określ czy znalezione wcześniej stany stacjonarne są stabilne. Załóż, że poza zakresem zaznaczonym na wykresie funkcja jest ciągła (nie przerywa się) i nie ma miejsc zerowych.









Zadanie 7 (wycinka lasu)

W tym zadaniu spróbujemy zbadać prosty model populacji drzew w lasie, który podlega regularnej wycince.

Wiemy, że przy braku wycinki drzew wzrost populacji opisuje równanie logistyczne (7). Dla uproszczenia załóżmy, że $k = 1$ i $N = 1$ (ciekawostka: można to osiągnąć przez przeskalowanie zmiennych występujących równaniu). Załóżmy, że drzewa są ścinane w stałym tempie określonym przez normę ustaloną dla danego terenu. Otrzymamy w ten sposób następujący model:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n(1-n) - r \tag{8}$$

gdzie $x(t)$ oznacza gęstość lasu w czasie t (wyrażoną jako ułamek maksymalnej gęstości, $n = 1$), a r oznacza szybkość z jaką drzewa są ścinane.

1. Sprawdź jakie są możliwe stany stacjonarne tego modelu.

2. Posługując się metodą graficzną zbadaj jak model gęstość lasu zmienia się kiedy czas t dąży do nieskończoności w dwóch przypadkach: $r < \frac{1}{4}$ oraz $r > \frac{1}{4}$. Określ czy stany stacjonarne (jeśli istnieją) są one stabilne.

3. Krótko podsumuj wnioski z tego modelu.

Zadanie 8 (hodowla ryb)

Liczebność populacji ryb P w czasie t w hodowli (stawie) jest określona równaniem

$$\frac{dP}{dt}(t) = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t).$$

gdzie r_0 jest współczynnikiem rozrodczości ryb, P_c jest maksymalną liczbą ryb, jaką może pomieścić staw (zwaną pojemnością stawu), a β odsetkiem ryb, które są odławiane.

1. Jaka wartość $\frac{dP}{dt}$ odpowiada rozwiązaniu stacjonarnemu, czyli liczbie ryb w stawie, która jest stała (nie zmienia się w czasie mimo rozmnażania i odławiania)?

2. Staw mieści maksymalnie 10000 ryb, współczynnik rozrodczości wynosi $0,05$, a odławiania $0,04$. Jakie jest rozwiązanie stacjonarne tego równania?

3. Dla jakich początkowych liczebności ryb w stawie ta liczba będzie maleć, a dla jakich rosnąć? Do jakiej wielkości?

4. Odławianie stało się skuteczniejsze i podniosło się do $0,05$. Co to oznacza, jakie będą tego konsekwencje dla hodowli?

Zadanie 9 (rekordowy skok)

30 lipca 2016 roku Luke Aikins dokonał pierwszego w historii skoku z wysokości ponad 7600 metrów bez spadochronu, lądując bezpiecznie w sieci rozłożonej dla niego na ziemi. Polecam obejrzeć to niesamowite dokonanie na YouTube pod adresem `https://www.youtube.com/watch?v=GaANi96Z-Wg&ab_channel=JeffBowron`. Spróbujmy skonstruować model, który opisze jak jego prędkość zmieniała się w czasie. Założymy, że samolot z którego wyskoczył nie poruszał się wówczas względem ziemi.

1. Przypuśćmy, że jedyna siła jaka działała na Aikinsa to siła grawitacji. Oznacza to, że jego przyspieszenie zdefiniowane jako szybkość zmiany prędkości w czasie wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$$

gdzie $g \approx 9.81\mathrm{ms}^{-2}$ to przyspieszenie ziemskie. Spróbuj odnaleźć funkcję $v(t)$, która będzie spełniać to równanie oraz warunek początkowy (zerową prędkość w momencie wyskoku z samolotu). Naszkicuj wykres określający jak prędkość $v(t)$ zmienia się w czasie t. Z jaką prędkością Aikins uderzyłby w sieć, jeśli wiemy, że jego lot trwał 121 sekund? Czy to oszacowanie jest wiarygodne?

2. Teraz załóżmy bardziej realistyczny model, w którym poza przyspieszeniem ziemskim działa na niego opór powietrza proporcjonalny do prędkości podniesionej do kwadratu (w kierunku przeciwnym do jego prędkości). Oznacza to, że jego przyspieszenie wynosi:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2$$

gdzie k to współczynnik oporu powietrza (zależny m.in. od jego gęstości i ułożenia ciała skoczka), który założymy, że jest stały podczas lotu.

Narysuj wykres funkcji $f(v) = g - kv^2$ i znajdź stan stacjonarny dla naszego modelu. Co możemy na podstawie metody graficznej wywnioskować na temat prędkości Aikinsa? Oszacuj maksymalną prędkość jaką może osiągnąć zakładając $k = 0.0035$. Spróbuj naszkicować wykres prędkości $v(t)$ jako funkcji czasu t.

3. (**zadanie trudniejsze**) Pokaż, że rozwiązaniem równania z poprzedniego podpunktu jest funkcja:

$$v(t) = a\frac{e^{bt} - 1}{e^{bt} + 1}$$

gdzie a i b to pewne stałe. Sprawdź jak zależą one od wartości k i g, oraz czy rozwiązanie spełnia warunek początkowy.

Co się będzie działo z prędkością kiedy czas t będzie dążyć do nieskończoności? Jaką prędkość osiągnąłby Aikins po 121 sekundach lotu? Przyjmij wartość $k = 0.001$. Jak ma się ta liczba do oszacowań z podpunktu 1) i 2)?

4. Wskaż potencjalne ograniczenia / nieuwzględnione czynniki w naszym modelu.

5. (**zadanie jeszcze trudniejsze**) Jak należy zmodyfikować rozwiązanie szczególne z poprzedniego podpunktu, żeby odstać rozwiązanie ogólne, tzn. takie, które uwzględnia dowolną prędkość samolotu podczas skoku?

6. (**zadanie dla ambitnych**) Na podstawie filmu `https://www.youtube.com/watch?v=GaANi96Z-Wg&ab_channel=JeffBowron` narysuj rzeczywisty wykres przedstawiający prędkość Aikinsa od czasu. Porównaj na wykresie model opracowany na ćwiczeniach z danymi z lotu (możesz spróbować pomanipulować stałą k, aby dostać jak najbardziej zgodny wynik. Do narysowania wykresu możesz wykorzystać Excel lub Pythona. Jeśli wykonasz to zadanie to pochwal się nim na Discordzie na kanale *Nauka/#Matematyka*.

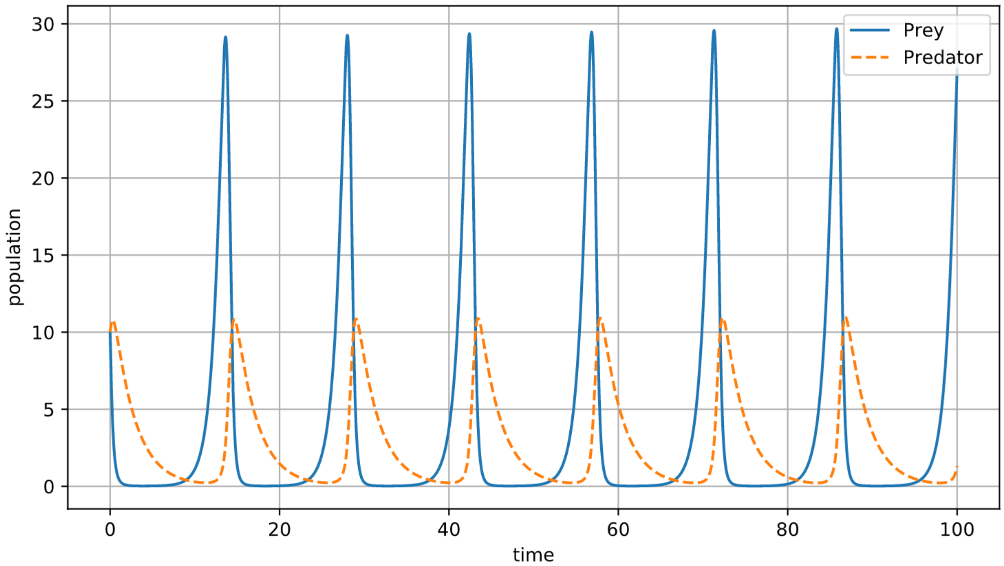
3 Układy dynamiczne z dwiema zmiennymi

3.1 Podsumowanie siódmego wykładu

Podobnie jak układy równań w szkole pozwalają nam uwzględnić więcej niż jedną niewiadomą (liczbę), to układy równań różniczkowych mogą uwzględniać więcej niż jedną niewiadomą funkcję. Przykładem może być model Volterry-Lotki (także znany jako model drapieżnik-ofiara), który opisuje zmianę populacji drapieżnika $x(t)$ i populacji ofiary $y(t)$ w czasie. Jest on opisany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax - bxy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= cxy - dy \end{aligned} \tag{9}$$

Przykładowe rozwiązania tego układu równań różniczkowe obliczone numerycznie przedstawia Rysunek 4.



Rysunek 4: Przykładowe rozwiązanie modelu ofiara-drapieżnik (źródło: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations`).

Układy dwóch równań różniczkowych mają podobne własności do pojedynczych równań różniczkowych. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że:

- Do znalezienia rozwiązania szczególnego musimy określić dwa warunki początkowe - wartość $x(0)$ (u nas początkową liczbę ofiar) oraz wartość $y(0)$ (u nas początkową liczbę drapieżników).
- Stany stacjonarne tego układu są to stany, w których żadna ze zmiennych układu $x(t)$ i $y(t)$ nie zmienia się w czasie, tzn. kiedy zarówno $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ oraz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$.
- Rozwiązanie układu dynamicznego może 1) rosnąć/maleć nieograniczenie, tak jak w modelu (1), 2) zbiegać do stanu stacjonarnego, tak jak w modelu (7), lub 3) tworzyć zamknięte orbity, tak jak w modelu (9). Istnieje też jeszcze jedna możliwość, o której dowiecie się na wykładzie 8.

3.2 Zadania do siódmego wykładu

Zadanie 10 (jeże i krety)

Na pewnej łące żyły ze sobą jeże i krety. Choć swoją obecnością się za bardzo nie przejmowały, to wiecznie wojowały o główny składnik pożywienia dla obu gatunków - dżdżownice, ich ulubiony przysmak. Niestety jak zaczynało ich brakować to jeżom i kretom ciężko było wykarmić swoje potomstwo.

Chcąc dowiedzieć się, czy oba gatunki mogą razem ze sobą współżyć skonstruujemy model, który opisze jak zmienia się populacja jeży $x(t)$ i kretów $y(t)$ w czasie. Model można opisać następującymi równaniami:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 - x - ay)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(1 - y - bx)$$

gdzie a, b, r są pewnymi dodatnimi stałymi parametrami.

1. Znajdź wszystkie możliwe stany stacjonarne tego modelu oraz interpretuj je w kontekście populacji jeży i kretów. Zaznacz znalezione stany stacjonarne na wykresie x vs y.

2. Jaki warunek (lub warunki) musiałby być spełniony, żeby oba gatunki mogły ze sobą współżyć na łące?

3. (**zadanie dla ambitnych**) Czy stan stacjonarny, w którym oba gatunki współżyją, jest stabilny? Zbadaj oba możliwe przypadki.

   Wskazówka: Narysuj na diagramie z rysunku pierwszego linie na których $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$, a następnie określ czy x i y będzie rósł czy maleć w czasie w każdym z regionów. Na podstawie kierunku zmiany x i y możesz spróbować wywnioskować czy populacja jeży i kretów będzie się zbliżać do danego stanu stacjonarnego czy oddalać.

Zadanie 11 (ciężarek na sprężynie)

W tym zadaniu zbudujemy model dynamiczny opisujący ruch wózka/ciężarka na sprężynie. Na początku rozważmy wózek znajdujący się na poziomym stole, przymocowany za pomocą sprężyny do ściany (patrz Rysunek 5A). Załóżmy, że między wózkiem a stołem nie występuje tarcie.

Zgodnie z tzw. prawem Hooka, siła działająca na ciężarek jest proporcjonalna do wychylenia ciężarka z punktu równowagi. Zatem z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

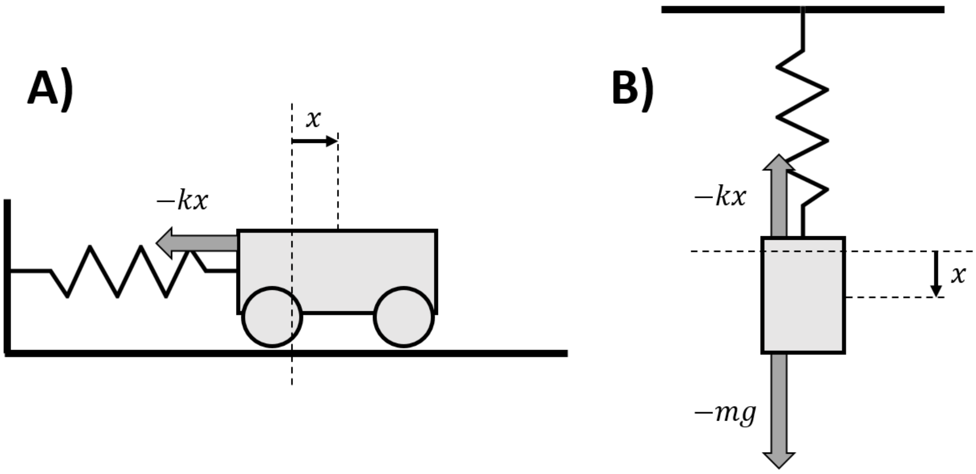
$$F = ma \tag{10}$$

$$ma = -kx \tag{11}$$

Zwróćmy uwagę, że przyspieszenie jest zdefiniowane jako szybkość zmiany prędkości w czasie, a prędkość jako szybkość zmiany położenia w czasie. Zapisując to w postaci pochodnych mamy:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$



Rysunek 5: Układ do zadania "Ciężarek na sprężynie"

1. Pokaż, że drugą zasadę dynamiki Newtona można zapisać jako:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}x \tag{14}$$

   Tym samym wraz z równaniem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych na $x(t)$ i $v(t)$.

2. Znajdź stan stacjonarny dla tego układu.

3. Pokaż, że całkowita energia układu:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{15}$$

   spełnia zasadę zachowania energii, tzn. nie zmienia się w czasie.

4. Rozważmy $m = k = 1$ (jest to możliwe poprzez odpowiednie przeskalowanie $x(t)$ i $v(t)$). Na podstawie równania (15) naszkicuj na wykresie fazowym x od v możliwe trajektorie dla naszego układu. Zinterpretuj zachowanie układu słownie.

5. (**rozszerzenie 1**) Rozważ istnienie siły oporu proporcjonalnej do prędkości poruszania się ciała (i przeciwnym kierunku). Skonstruuj model dynamiczny opisujący tę sytuację. Pokaż, że całkowita energia układu będzie malała w czasie. Opisz słownie jak wpłynie to na zachowanie układu.

6. (**rozszerzenie 2**) Rozważ ciężarek zawieszony w powietrzu na pionowej sprężynie bez oporów powietrza (patrz Rysunek 5B). Skonstruuj model dynamiczny opisujący tę sytuację. Zapisz równanie na energię całkowitą układu dodając do niego energię potencjalną mgh, oraz pokaż, że nie zmienia się ona w czasie.

Zadanie 12 (model bitwy)

Kluczowym elementem przy opracowywaniu strategii wojennych jest umiejętne oszacowanie możliwych strat na wypadek konfliktu militarnego, a skutki złego oszacowania przewagi militarnej dobitnie widać po ostatnich wydarzeniach za wschodnią granicą.

Spróbujemy opracować bardzo prosty model opisujący skutek starcia dwóch armii o liczebności x_0 i y_0, zakładając równą możliwość bojową żołnierzy po obu stronach. Założenie to nie reprezentuje dobrze charakteru współczesnych konfliktów zbrojnych, które są mocno asymetryczne, ale może dobrze obrazować pewne historyczne bitwy czy bitwy w bardziej kontrolowanym środowisku, na przykład grach komputerowych.

W takim uproszczonym scenariuszu możemy założyć, że szybkość strat po każdej stronie konfliktu jest proporcjonalna do liczby żołnierzy po przeciwnej stronie. Matematycznie możemy to zapisać następująco:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ky$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -kx$$

gdzie $x(t)$ określa liczbę żołnierzy zdolnych do walki po stronie X w czasie t, a $y(t)$ liczbę żołnierzy zdolnych do walki po stronie Y. Stała k określa szybkość z jaką żołnierze jednej armii pokonują żołnierzy przeciwnika. My dla uproszczenia założymy w dalszej części zadania, że $k = 1$, gdyż stała k wpływa tylko na czas bitwy, a nie na jej wynik końcowy (patrz podpunkt 5).

1. Pokaż, że rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych jest:

   $$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

   $$y(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

   Wyznacz zależność między C_1 i C_3 oraz między C_2 i C_4.

2. Wyznacz wartość stałych, dla których spełniony będzie warunek początkowy $x(0) = x_0$ oraz $y(0) = y_0$.

3. Wyznacz długość bitwy przy założeniu, że strona Y ma przewagę liczebną, tzn. $y_0 > x_0$. Załóż, że bitwa skończy się kiedy po stronie X nie pozostanie żaden żołnierz zdolny do walki.

4. Pokaż, że liczba żołnierzy zdolnych do walki pozostanie po stronie Y po zakończeniu bitwy wynosi:

   $$y(T) = \sqrt{y_0^2 - x_0^2}$$

   Z równania tego płynie ciekawy wniosek: kwadrat liczby żołnierzy pozwala lepiej określić siłę armii niż sama ich liczba. Na przykład jedna duża armia ma porównywalny potencjał do czterech dwukrotnie mniejszych armii, przez co ciężko jest prowadzić wojnę na zbyt wielu frontach jednocześnie (co pokazały liczne konflikty zbrojne historyczne i współczesne).

   Bardzo ciekawa jest też zbieżność powyższego równania z twierdzeniem Pitagorasa.

5. (**dla chętnych**) Pokaż, że stała k występująca w równaniach, nie wpływa na końcową liczbę strat po każdej stronie.

6. (**dla ambitnych**) Spróbuj rozszerzyć model tak, żeby uwzględniał inną możliwość bojową po obu stronach (np. lepiej wyszkolonych i bardziej zmotywowanych żołnierzy po jednej stornie konfliktu) oraz przeanalizować wnioski z niego płynące.

4 Proponowane zadania domowe

Uwaga: Poniższe zadania są proponowane jako zadania domowe, ale prowadzący może wybrać inne zadania jak praca domowa i zaproponować inny rozkład punktacji. Możecie oddać prowadzącemu rozwiązania wszystkich lub tylko części zadań domowych. Maksymalna liczba punktów, którą można zdobyć w każdym tygodniu wynosi 6. Powodzenia!

Zadanie 13 (1 punkt)

Pokaż, że ogólnym rozwiązaniem równania

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$$

jest funkcja

$$x(t) = \frac{1}{c - t}$$

Następnie wyznacz stałą c zakładając warunek początkowy $x(0) = 1$. Opisz słownie (możesz wspomóc się wykresem) zmianę funkcji $x(t)$ w czasie.

Zadanie 14 (rozpad promieniotwórczy) (2 punkty)

Pierwiastki promieniotwórcze (np. uran) podlegają samorzutnemu rozpadowi promieniotwórczemu. Liczba atomów, które ulegają rozpadowi na jednostkę czasu, jest proporcjonalna do liczby wszystkich atomów tego pierwiastka w próbce. Zmianę ilości atomów promieniotwórczych $n(t)$ w czasie t można opisać za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

1. Znajdź (metodą przez zgadnięcie) rozwiązanie tego równania, zakładając, że początkowo liczba atomów wynosi $n(0) = n_0$. Sprawdź znalezione rozwiązanie.
   Wskazówka: porównaj to równanie różniczkowe z modelem przedstawionym na czwartym wykładzie opisanym równaniem (1) *na stronie 1.*

2. Czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$ określa czas po jakim rozpadowi ulegnie połowa początkowych atomów. Wyraź ten czas za pomocą parametru λ.

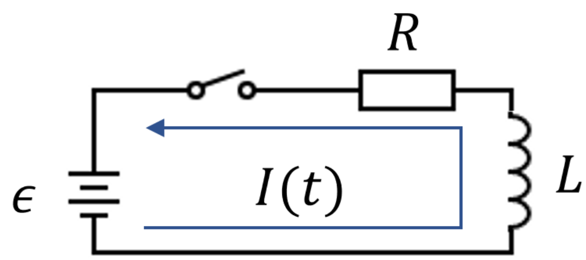
Zadanie 15 (prąd płynący przez zwojnicę) (3 punkty)

W podobny sposób, co w zadaniu z kondensatorem, można wyznaczyć $I(t)$ dla układu szeregowego połączenia opornika i cewki (zwojnicy). Rozważmy obwód jak na rysunku 6 poniżej. Celem zadania jest znalezienie, w jaki sposób zmienia się natężenie prądu w czasie w obwodzie, po zamknięciu włącznika.

Oznaczmy spadek napięcia na oporniku jaki $U_R(t)$ a na zwojnicy jako $U_L(t)$. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa całkowity spadek napięcia w oczku obwodu musi być równy zero:

$$\varepsilon - U_R(t) - U_L(t) = 0$$

$$U_R(t) + U_L(t) = \varepsilon \tag{16}$$



Rysunek 6: Obwód RL

Z prawa Ohma, możemy wyznaczyć napięcie na oporniku:

$$U_R = IR \tag{17}$$

Z kolei zależność prądu i napięcia na zwojnicy opisuje równanie różniczkowe:

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

gdzie wartość L to charakterystyczna wartość elementu, zwana induktancją i wyrażana w Henrach ozn. H.

Obwód składa się z jednej pętli, więc przez wszystkie elementy układu płynie ten sam prąd.

1. Wykorzystaj powyższe trzy równania aby wyprowadzić następujące równanie różniczkowe opisujące przebieg natężenia $I(t)$ w czasie:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \varepsilon - IR$$

2. Załóżmy, że początkowo przez układ nie płynął żaden prąd (przełącznik był otwarty). Możemy przyjąć warunek początkowy $I(t=0)=0$. Spróbuj znaleźć rozwiązanie w postaci:

$$I(t) = a + be^{-ct}$$

   gdzie stałe a, b, c należy wyrazić za pomocą parametrów R, L oraz ε.

3. Naszkicuj przebieg $I(t)$

4. Przyjmij wartości elementów w obwodzie $\varepsilon = 10$V, $R = 1$kΩ i L $= 1\mu H$ $(\mu = 10^{-3})$ oraz określ:

   (a) maksymalny prąd jaki może płynąć przez obwód,

   (b) po jakim czasie prąd płynący przez cewkę wyniesie około 63% maksymalnego prądu.

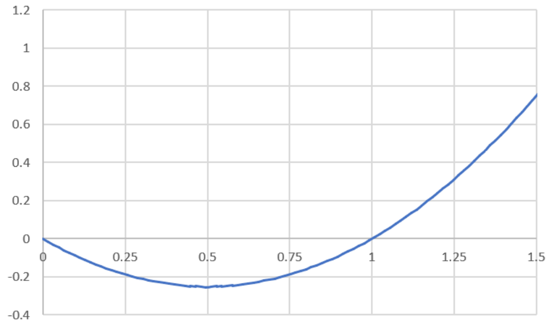
   Co odpowiada za wartość maksymalnego prądu płynącego w obwodzie? Jak zachowuje się zwojnica, gdy $t \to \infty$? Patrząc na rozwiązanie zadania z kondensatorem, jak zachowuje się kondensator gdy $t \to \infty$?

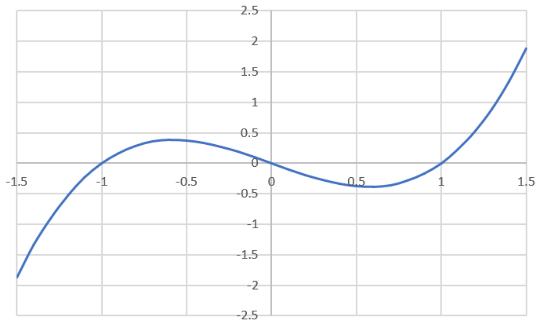
Zadanie 16 (2 punkty)

Rozważmy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$$

gdzie funkcja $f(x)$ została przedstawiona na poniższych wykresach (każdy wykres opisuje inne równanie różniczkowe). Dla każdego równania 1) wskaż wszystkie stany stacjonarne, 2) wykorzystaj metodę graficzną do opisania zachowania układu, i 3) określ czy znalezione wcześniej stany stacjonarne są stabilne. Załóż, że poza zakresem zaznaczonym na wykresie funkcja jest ciągła (nie przerywa się) i nie ma miejsc zerowych.





Zadanie 17 (2 punkty)

Rozważmy układ dynamiczny opisany równaniem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x;r) = r - x^2$$

1. Narysuj wykres funkcji $f(x;r)$ dla $r > 0$ i $r < 0$
2. Znajdź stany stacjonarne powyższego równania.
3. Używając metody geometrycznej opisz co będzie działo się z układem kiedy czas t będzie dążyć do nieskończoności.
4. Określ czy znalezione stany stacjonarne są stabilne.

Zadanie 18 (wyścig zbrojeń) (3 punkty)

Relacje międzynarodowe również można opisywać za pomocą układów dynamicznych. Przypuśćmy, że chcemy zamodelować tzw. potencjał wojenny (z ang. *war potential*) będący dodatnią wielkością określającą gotowość państw na wybuch wojny, dla dwóch wrogich wobec siebie państw A i B. Możemy opisać zmianę potencjału wojennego za pomocą następującego modelu:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x_0 - x + ay$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y_0 - y + bx$$

gdzie stałe parametry a i b określają jak szybko dane państwo może uzbroić się w odpowiedzi na zagrożenie z zewnątrz.

1. W obliczu braku zewnętrznego zagrożenia ($a = 0$ i $b = 0$), każde państwo ma pewien podstawowy potencjał wojenny. Oszacuj ten stan stacjonarny i określ czy jest stabilny.

2. Przy obecności wzajemnego oddziaływania między państwami, następuje rozwinięcie potencjału wojennego. Znajdź nowy stan stacjonarny oraz określ jaki warunek musi być spełniony, żeby taki stan istniał. Co się stanie z układem jeśli niniejszy warunek nie będzie spełniony?

3. Zakładając, że stan stacjonarny istnieje, pokaż, że potencjał wojenny każdego z państwa jest w nim większy niż potencjał wojenny przy braku zagrożenia zewnętrznego.

Zadanie 19 (1 punkt)

Rozważmy model epidemii SIR z ósmego wykładu:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma IR$$

Zaproponuj modyfikację powyższego modelu, która uwzględni to, że uodpornione osoby mogą stracić swoją odporność.

Zadanie 20 (3 punkty)

Rozważmy model epidemii SIR, który uwzględnia dynamikę populacji:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lambda - \mu S - \beta SI$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I - \mu I$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - \mu R$$

Poza dynamiką znaną z wykładu nt. modelowania epidemii, model ten uwzględnia stały naturalny przyrost osób zdrowych w populacji λ, oraz stałą naturalną śmiertelność taką samą dla osób podatnych, zarażonych i ozdrowiałych. Załóż, że wszystkie parametry modelu (λ, μ, β i γ) są dodatnie.

1. Znajdź możliwe stany stacjonarne tego modelu, podaj warunki ich występowania.

2. Porównaj znalezione stany stacjonarne powyższego modelu ze stanem stacjonarnym dla standardowego modelu SIR (bez dynamiki populacji) wyprowadzonym podczas 7. wykładu. Objaśnij słownie zaobserwowane różnice między tymi modelami.