Laboratorium programistyczne 2 - pochodne i wykresy

Projekt „Matematyka dla Ciekawych Świata”,
Piotr Morawiecki, Robert Paciorek

2023-03-23

1 Tworzenie listy za pomocą pętli for

Na ostatnich zajęciach poznaliśmy pętlę **for**, która umożliwia wykonanie sekwencji podobnych komend. Przykładowo możemy za jej pomocą napisać program, który utworzy listę 21 liczb z przedziału od 0 do 10 w równych odstępach:

```
lista = []
for i in range(21):
    lista.append(i/2)
print(lista)
```

Powyższy program tworzy pustą listę, a następnie w pętli **for** dodaje do niej kolejne liczby:

`[0.0, 0.5, 1.0, 1.5, ..., 9.5, 10.0]`

Ciekawostka dla zaawansowanych: Python pozwala nam zapisać tworzenie tej list za pomocą jednolinijkowej komendy **for**:

```
lista = [i/2 for i in range(21)]
print(lista)
```

Jej działanie jest identyczne do kodu zamieszczonego powyżej, jednak wykorzystywanie jednolinijkowych komend może sprawić, że kod stanie się krótszy i bardziej czytelny. My jednak będziemy głównie korzystać ze standardowej postaci pętli, która dla początkujących może być łatwiejsza w użyciu. Nie mniej możesz używać również wersji jednolinijkowej.

Zadanie 1.0.1

Stwórz i wypisz na ekran listę zawierającej 16 liczb z przedziału od -1 do 2, t.j. `[-1.0, -0.8, -0.6, ..., 1.8, 2.0]`.

2 Wykresy

2.1 Biblioteka pyplot

Do rysowania wykresów w Pythonie posłużyć może np. pakiet `pyplot`. Aby go używać, na początku programu musimy go zaimportować i wybrać odpowiedni tryb poleceniami:

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Do tworzenia wykresów będzie nam służyła funkcja `plot()` z biblioteki zaimportowanej jako `plt`. Będziemy ją wywoływać w sposób następujący: `plt.plot(x, y, format)`, gdzie `x` jest listą kolejnych wartości osi X, `y` jest listą odpowiadających im wartości osi Y, a format określa typ rysowanego wykresu. Na przykład:

```
plt.plot([1, 2, 3], [1, 2, 4])
```

Python pozwala nam również ustawić własne nazwy osi pionowej i poziomej, na przykład:

```
plt.xlabel("oś pozioma")
plt.ylabel("oś pionowa")
```

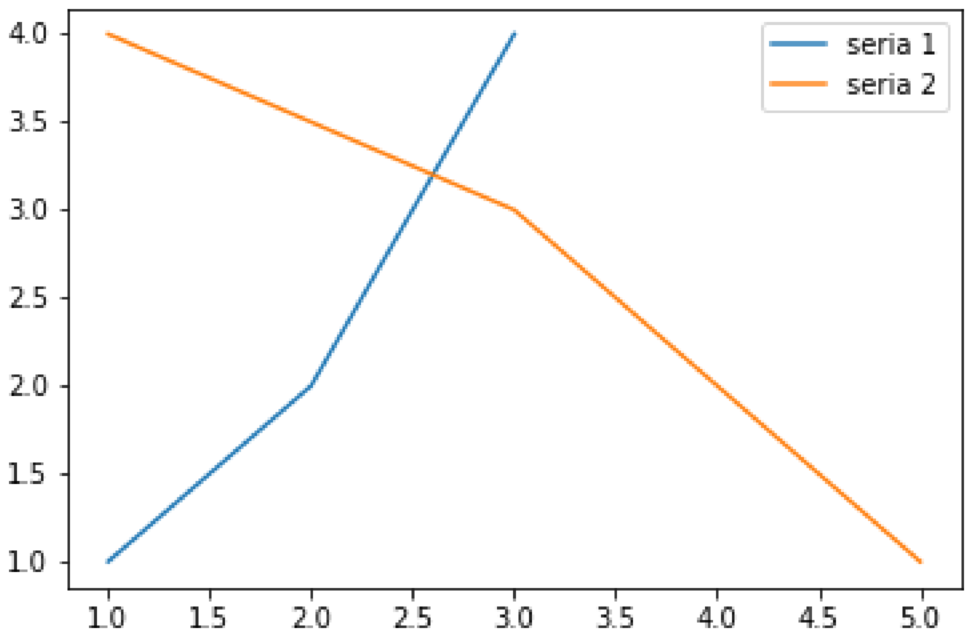
Wykres możemy wyświetlić za pomocą komendy `plt.show()`

```
plt.show()
```

Biblioteka `pyplot` pozwala nam narysować więcej niż jedną serię danych. W tym celu wystarczy dodać więcej instrukcji `plot()` przed wyświetleniem wykresu. Warto dla czytelności dodać legendę komendą `legend`, będzie ona używać etykiety wykresu przekazanej w argumencie `label` funkci `plot`:

```
plt.plot([1, 2, 3], [1, 2, 4], label='seria 1')
plt.plot([1, 3, 5], [4, 3, 1], label='seria 2')

plt.legend()
plt.show()
```



Zadanie 2.1.1

Narysuj wykres zawierający pierwsze pięć potęg dwójki.

2.2 Rysowanie wykresu funkcji

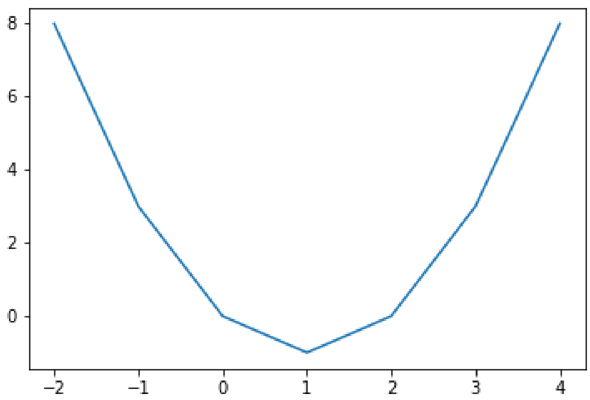
Powiedzmy, że chcielibyśmy narysować wykres pewnej funkcji matematycznej, na przykład $f(x) = x^2 - 2x$ w zakresie od $x = -2$ do $x = 4$. Możemy to zrobić tworząc listę `x=[-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]`, a następnie obliczając wartość $f(x)$ dla każdej wartości x w poniżej przedstawiony sposób:

```
x = range(-2, 5)
f = []
for i in x:
    f.append(i**2-2*i)
plt.plot(x,f)
```

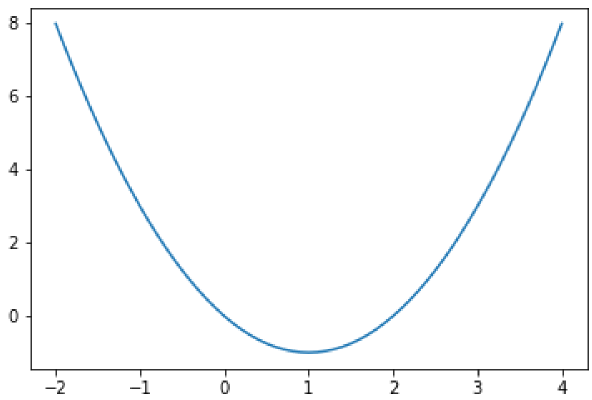
Jednak parabola, którą w ten sposób wygenerowaliśmy ma dość niską rozdzielczość - wygląda bardziej na linię łamaną (patrz Rysunek 1a). Możemy zwiększyć jakość wykresu zwiększając liczbę wartości x, na przykład do 61. Możemy to zrobić następująco:

```
x = []
f = []
for i in range(61):
    x.append(-2+6*i/60)
    f.append(x[-1]**2-2*x[-1])
plt.plot(x,f)
```

Dla przypomnienia `x[-1]` odwołuje się do ostatniego elementu listy `x`.



(a) Wykres z 7 punktów.



(b) Wykres ze 101 punktów.

Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 2x$

Zwróć uwagę na to, że pierwsza linijka powyższego kodu tworzy listę

$$x = [-2, -1.9, -1.8, -1.7, ..., 3.9, 4]$$

Po zwiększeniu liczby punktów wykres został wygładzony (patrz Rysunek 1b).

Zadanie 2.2.1

Utwórz listę `t` zawierającą 101 liczb z przedziału od 0 do 10, a następnie oblicz dla nich wartość funkcji $x(t) = t^2$, $y(t) = 2^t$. Wykorzystaj utworzone w ten sposób listy, żeby narysować wykres funkcji $x(t)$ i $y(t)$. Pamiętaj o dodaniu czytelnej legendy. Która funkcja rośnie szybciej?
Zadanie dodatkowe: Dla jakich przedziałów wartości, funkcja $x(t) = t^2$ jest wyższa od $y(t) = 2^t$?

Funkcje również możecie łatwo narysować korzystając z różnych narzędzi online, np. w kalkulatorze graficznym dostępnym na stronie `https://www.desmos.com/calculator`. Polecam spróbować narysować wykresy funkcji z poprzedniego zadania w Desmos i porównać je ze sobą.

3 Pochodne

Na wykładzie pochodna została zdefiniowana za pomocą granicy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Na przykład rozważmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ dla $x = 1$. Jest ona zdefiniowana jako:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Wykorzystując powyższą definicję pochodnej możemy łatwo oszacować wartość pochodnej, obliczając wyrażenie po prawej stronie równania dla małej wartości Δx. Na początku weźmy wartość $\Delta x = 0.1$. Obliczmy w Pythonie:

```
x = 1
dx = 0.1
((x+dx)**2 - x**2) / dx
```

Otrzymamy wynik 2.1. **Ciekawostka:** Wynik ten może on zostać wyświetlony jako 2.100000000000002, jednak obecność 2 na ostatnim miejscu rozwinięcia dziesiętnego jest skutkiem tego, że Python ma ograniczoną precyzję zapisywania liczb w pamięci komputera. Zapisuje je w systemie dwójkowym (binarnym), a nie wszystkie ułamki zapisane w systemie dziesiętnym (np. 2.1) mogą zostać dokładnie zapisane w systemie dwójkowym.

Zadanie 3.0.1

Spróbuj stopniowo zmniejszać wartość zmiennej `dx`, za każdym razem obliczając pochodną funkcji $f(x) = x^2$ dla $x = 1$. Co obserwujesz?

Spróbujmy teraz bardziej systematycznie sprawdzić jak zależy błąd obliczonej pochodnej w zależności od długości kroku `dx`. W tym celu obliczmy wartość pochodnej dla kilku wybranych wartości `dx`, a następnie umieśćmy je na wykresie.

```
x = 1
dx = [0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.001]
pochodna = []
for i in dx:
    pochodna.append(((x+i)**2 - x**2) / i - 1)
plt.plot(dx, pochodna)
plt.xlabel('dx')
plt.ylabel('błąd oszacowania df/dx dla x=1')
plt.show()
```

Co obserwujesz?

Zadanie 3.0.2

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3$ dla $x = 1$ dla kilku wybranych wielkości `dx`. Następnie sprawdź za pomocą wykresu czy błąd naszego oszacowania zwiększa się proporcjonalnie od `dx`.

Zadanie 3.0.3

Koncentrację wirusów HIV w osoczu krwi leczonego pacjenta opisuje funkcja $n(t) = t * 2^{-t}$. W tym zadaniu zbadamy jak pochodna tej funkcji (szybkość wzrostu populacji wirusów) zmienia się w czasie. W tym celu wykonaj następujące zadania:

1. Narysuj wykres tej funkcji dla 101 wartości t z przedziału od 0 to 10.
2. Spróbuj naszkicować wykres pochodnej tej funkcji bez umieszczania wartości liczbowych na osi pionowej.
3. Następnie oblicz wartość pochodnej w każdym punkcie wykorzystując wybraną małą wartość kroku `dt`. Następnie narysuj wykres pochodnej $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ dla różnych wartości x.
4. Czy wykres uzyskany w Pythonie jest zgodny z naszym szkicem?

4 Funkcja wykładnicza z wykorzystaniem biblioteki `math`

Biblioteka `math` zawiera wiele przydatnych funkcji matemtycznych. W celu jej zaimportowanie wykorzystaj komendę

```
import math
```

Biblioteka ta zawiera między innymi pierwiastek (`math.sqrt`) funkcję wykładniczą o podstawie e (`math.exp`), logarytm (`math.log`) oraz wiele innych.

Wykonajmy przykładowe działania z wykorzystaniem tej biblioteki:

```
import math

print(math.sqrt(4))      # pierwiastek z 4
print(math.sqrt(10))     # pierwiastek z 10

print(math.exp(1))       # e do potęgi 1 (czyli e)
print(math.exp(5))       # e do potęgi 5

print(math.log(100))     # logarytm naturalny z 100
print(math.log(100,10)) # logarytm o podstawie 10 ze 100
```

Dokładny opis wszystkich funkcji zawartych w bibliotece `math` można znaleźć w dokumentacji na stronie https://docs.python.org/3/library/math.html.

Zadanie 4.0.1

Oszacuj pochodną funkcji $f(x) = e^x$ dla różnych wartości x z przedziału od 1 do 10, a następnie sprawdź czy jest ona równa $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = e^x$.

Zadanie 4.0.2

Oszacuj pochodną logarytmu naturalnego $f(x) = \ln(x)$ dla różnych wartości x z przedziału od 0 do 10 (zwróć jednak uwagę, że funkcja nie ma wartości dla $x = 0$). Narysuj wykres pochodnej $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ jako funkcji x. Na podstawie wykresu lub wartości pochodnej, spróbuj odgadnąć jaką prostą funkcję matematyczną przedstawia ten wykres. Sprawdź swoją hipotezę.

5 Zadania dodatkowe

Zadanie 5.0.1

Zadanie dla ambitnych.
Napisz funkcję, która obliczy pochodną funkcji $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ numerycznie. Następnie oblicz wartość funkcji $f(x)$ i jej pochodnej $f'(x)$ dla 10000 wartości x przedziale od -1 do 1, a następnie wykorzystaj je, żeby narysować wykres $f(x)$ i $f'(x)$. Co obserwujesz?
Podpowiedź: Funkcję $\sin(x)$ *możesz obliczyć za pomocą komendy* `math.sin(x)`*. Pamiętaj o wcześniejszym zaimportowaniu biblioteki* `math`*.*

Zadanie 5.0.2

Zadanie dla ambitnych (i bardzo cierpliwych).
Joker znów terroryzuje miasto - musimy wezwać Batmana. W tym celu musisz utworzyć w Pythonie batsygnał. Potrzebne do tego funkcje znajdziesz na stronie https://mathworld.wolfram.com/BatmanCurve.html[a]. Jeśli ci się uda wyślij go do Batmana na kanał NAUKA/#informatyka na naszym Discordzie. Nasz los jest w twoich rękach!

a. Pojawia się w nim funkcja Heaviside'a, którą możesz zapisać jako $H(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x|}{x}\right)$

6 Praca domowa nr 2

Rozwiązania zadań domowych należy przesłać do czasu następnych ćwiczeń. Prowadzący może również zmienić ostateczny termin przesłania pracy domowej, np. na inną godzinę lub dzień.

Za pracę domową można maksymalnie dostać 6 punktów. Można wybierać zarówno łatwiejsze zadania, jak i trudniejsze, za większą liczbę punktów. Można również rozwiązać zadania za większą liczbę punktów, np. za 10. Jeśli wtedy poprawnie będą rozwiązane zadania za 5 punktów, to zostanie przydzielone 5 punktów. Jeśli będą poprawnie rozwiązane zadania za więcej niż 6 punktów, np. 8 czy 10, to taka osoba otrzyma maksymalnie 6 punktów.

Pamiętaj, żeby notebook był czytelny – każde zadanie powinno być umieszczone w osobnym bloku tekstowym oraz poprzedzone numerem (i opcjonalnie opisem) zadania. Komentarze są mile widziane.

W tym celu wysłania pracy domowej kliknij "Udostępnij" znajdujące się w prawym górnym rogu okna. Następnie w sekcji "Pobierz link" zmień domyślną opcję "Przeglądający" na "Komentujący", a następnie skopiuj podany w oknie link i wyślij do prowadzącemu zajęcia przez Discorda.

Zadanie 6.0.1 — 1 pkt

Utwórz i wypisz wykorzystując pętlę `for` pierwsze 10 potęg dwójki zaczynając od 2.

Zadanie 6.0.2 — 1 pkt

Napisz program (lub funkcję), który/a dla dowolnych wartości zmiennych `min`, `max` i `n`, utworzy i wypisze listę `n` równo oddalonych od siebie wartości z przedziału od `min` do `max`. Na przykład dla `min`= 2, `max`= 4 i `n`= 5 powinien utworzyć listę `[2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]`.

Zadanie 6.0.3 — 1 pkt

Oszacuj numerycznie pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ dla $x = 1$ i $x = 0$ i wypisz ją na ekran. Co obserwujesz wraz ze zmniejszaniem kroku Δx? (opisz w polu tekstowym)

Zadanie 6.0.4 — 2 pkt

Na pierwszym wykładzie liczbę Eulera wprowadziliśmy jako wartość graniczną działania

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Oblicz wartość funkcji $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dla całkowitych wartości n od 1 do 1000 i narysuj ją na wykresie (umieszczając f na osi pionowej, a n na osi poziomej). Opcjonalnie możesz dodać do wykresu linię poziomą odpowiadającą wartości e. Czy rzeczywiście wartość $f(n)$ dąży do stałej wartości?

Zadanie 6.0.5 — 2 pkt

Rysując wykres funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$ i $g(x) = x - 3$ w Pythonie znajdź (w przybliżeniu) wszystkie miejsca przecięcia tych wykresów.

Zadanie 6.0.6 — 2 pkt

Zadanie "miłosne". Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$ i $g(x) = -3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}|x|}}$ w przedziale x od -2 do 2. Do obliczenia wartości bezwzględnej możesz posłużyć się funkcją `abs()`.

Zadanie 6.0.7 — 3 pkt

Zadanie dla zaawansowanych. W jednym z zadań na ćwiczeniach z matematyki pokazywaliśmy, że funkcję wykładniczą $f(x) = e^x$ można przedstawić jako nieskończoną sumę

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Napisz funkcję, która oblicza sumę pierwszych n wyrazów, t.j. $g(x, n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Następnie narysuj wykres funkcji $f(x) = e^x$ oraz funkcji $g(x, n)$ dla kilku wartości n (np. $n = 1, 2, 3, 4, 5$). Co obserwujesz?

Zadanie 6.0.8 — 3 pkt

Narysuj wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych (na jednym ekranie). W jaki sposób są one powiązane między sobą (opisz słownie w polu tekstowym)?

1. $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x;$
2. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 8^x, \quad y = 8^{-x};$
3. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;$
4. $y = 0,9^x, \quad y = 0,3^x, \quad y = 0,6^x, \quad y = 0,1^x.$