

# Po co muzykowi grupy?

*Matematyka dla ciekawych świata XV*

Daniel Laskowski

Instytut Muzykologii UW

18.03.2024

# Interwały

8 półtonów

e c

A musical staff in treble clef showing two whole notes: E4 (on the second line) and C5 (on the first space). A bracket above the staff spans from E4 to C5, with the text "8 półtonów" written above it. Below the staff, the letters "e" and "c" are written under the respective notes.

0	pryma	1	P1
1		2 >	m2
2		2	M2
3		3 >	m3
4	←	3	M3
		4	P4
		4 < / 5 >	A4/d5
		5	P5
		6 >	m6
		6	M6
		7	m7
		7 <	M7
		8	P8

przewrót

6 >

# Powrót do teorii

*Jean-Phillippe Rameau*

## Równoważność oktawa

Dźwięki odległe o jedną oktawę lub więcej równych oktav są w relacji równoważności.

## Równoważność oktafowa

Dźwięki odległe o jedną oktafę lub więcej równych oktaf są w relacji równoważności.

## Równoważność enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

# Aksjomatyka teorii

## Równoważność oktavowa

Dźwięki odległe o jedną oktavę lub więcej równych oktaw są w relacji równoważności.

## Równoważność enharmoniczna

Dźwięki zależne enharmonicznie są równoważne.

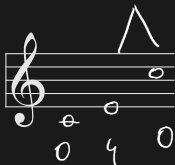
## Wniosek

Równoważność oktavowa implikuje równoważność interwałową.

# Klasyczna teoria w nowym języku

The image shows two musical staves in treble clef. The top staff contains a sequence of notes: E, F#, G, A, B, C, D, E, F#, G, A, B. The bottom staff contains a sequence of notes: E, F, G, A, B, C, D, E, F, G, A, B. Below the notes, the numbers 0 through 11 are written in white. The numbers 10 and 11 are crossed out with a red line. Above the number 10, the letter 'T' is written in green. Above the number 11, the letter 'E' is written in green. Below the bottom staff, the words 'ten eleven' are written in green cursive.

# Klasyczna teoria w nowym języku



$$4 - 0 = 4$$

$$0 - 4 = -4 = 8$$

$d_1$  - dźwięk 1.

$d_2$  - dźwięk 2.

$$d_1 - d_2 \quad d_2 - d_1$$

↖ ↗  
mniejsza to interwał

		interwał
1	P1	0
2 >	m2	1
2	M2	2
3 >	m3	3
3	M3	4
4	P4	5
4 < / 5 >	A4/d5	6
5	P5	5
6 >	m6	4
6	M6	3
7	m7	2
7 <	M7	1
8	P8	0



# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

$$\begin{array}{ccc} c, & \text{fis}, & a \\ 0 & 6 & 9 \end{array} \Rightarrow \{0, 6, 9\}$$

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a      {0, 6, 9}

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a

{0, 6, 9}

$$\begin{aligned} 0-4 &= 4 \\ 4-0 &= 4 \\ 0,4 &\Rightarrow 4 \end{aligned}$$

## Definicja

Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\overline{A}$ .

Przykład:

$$\overline{\{0, 6, 9\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, T, E\}$$

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a       $\{0, 6, 9\}$

## Definicja

Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\overline{A}$ .

Przykład:

$\overline{\{0, 6, 9\}}$

# Zbiory klas wysokości dźwięku

## Definicja

Zbiorem klas wysokości dźwięku, nazwiemy zbiór zawierający klasy wysokości dźwięków.

Przykład:

c, fis, a       $\{0, 6, 9\}$

## Definicja

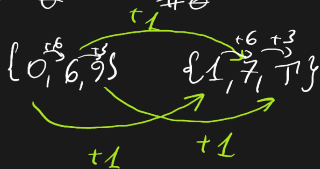
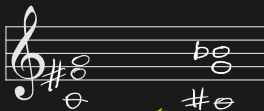
Dopełnieniem zbioru  $A$  nazywamy zbiór takich klas wysokości dźwięków, które do zbioru  $A$  nie należą. Takie dopełnienie oznaczamy  $\overline{A}$ .

Przykład:

$\overline{\{0, 6, 9\}}$        $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, T, E\}$

# Transpozycja

{ , , }



$$T_1(\{0, 6, 9\}) = \{1, 7, 11\}$$

$$T_5(\{0, 6, 9\}) = \{5, 11, 2\}$$



# Inwersja



$$\begin{aligned} & \{0, 4, 6\} \\ & \{0, 4, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{6, 8, 0\} \\ & \{E, 1, 5\} \end{aligned}$$

$$\Pi_5 I(\{0, 4, 6\}) = \{E, 1, 5\}$$

$$\Pi_7 I(\{0, 4, 6\}) = \{7, 3, 7\}$$

## Definicja

Formą normalną nazwiemy zapis zbioru klas wysokości dźwięku we wznoszącym porządku interwałowym i najbardziej skondensowanym pod względem interwałowym.

$\{3, 5, 6, 9\}$

$\{1, 4, 7, 8, T\}$

$\{0, 4, 8\}$

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

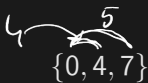
Przykład:

# Zawartość interwałowa

## Definicja

Zawartością interwałową nazywamy kolekcję wszystkich interwałów, zawartych w zbiorze klas wysokości  $A$ , policzonych z krotnościami.

Przykład:



$$0-4 = -4 = 8$$

$$4-0 = 4$$

$$4-7 = 9$$

$$4-0 = 4$$

$$0-7 = 5$$

$$7-4 = 3$$

jedna 3  
jedna 4  
jedna 5

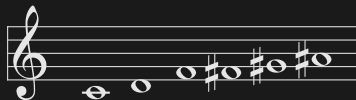
Wektor interwałowy

$$\langle 0, 0, 1, 1, 1, 0 \rangle$$



# Jeszcze jeden przykład

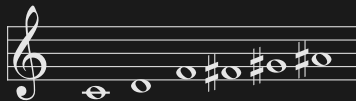
{0, 2, 5, 6, 8, T}



⟨1, 4, 2, 4, 2, 3⟩

# Jeszcze jeden przykład

{0, 2, 5, 6, 8, T}



⟨1, 4, 2, 4, 2, 3⟩

{1, 3, 4, 7, 9, E}



⟨1, 4, 2, 4, 2, 3⟩

# Twierdzenie o heksachordzie

## Twierdzenie (M. Babbitt)

Niech  $H$  będzie heksachordem, a  $\overline{H}$  jego dopełnieniem. Wówczas  $\mathcal{I}_H = \mathcal{I}_{\overline{H}}$ .