Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 1.
Relacje równoważności i grupy

Daniel Laskowski

marzec 2024

1 Powtórzenie z wykładu

1.1 Relacje równoważności

Na wykładzie poznaliśmy pojęcie *relacji* w zbiorze S. Intuicyjnie, nazywamy tak pewien ustalony dobór elementów zbioru w pary. Szczególnym typem relacji, nad którym się pochyliliśmy są *relacje równoważności.* Celem takiej relacji jest utożsamianie ze sobą niektórych elementów zbioru, wedle określonej reguły. Przykładowo, jeżeli za S przyjmiemy zbiór wszystkich wielokątów, możemy utożsamiać ze sobą wielokąty o tej samej liczbie kątów. Formalnie, relacja $\sim$ na zbiorze S jest relacją równoważności, jeśli jest:

1. zwrotna, to znaczy dla dowolnego elementu $a \in S$ mamy:
$$a \sim a,$$
2. symetryczna, to znaczy dla dowolnych elementów $a, b \in S$:
$$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a,$$
3. przechodnia, to znaczy dla dowolnych elementów $a, b, c \in S$:
$$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Zdefiniowaliśmy również *klasę abstrakcji* elementu $a \in S$, jako zbiór elementów będących w relacji $\sim$ z elementem a (oznaczyliśmy ją symbolem $[a]_\sim$), a także *zbiór ilorazowy*, który jest zbiorem klas abstrakcji wszystkich elementów zbioru S w relacji $\sim$ (oznaczyliśmy go symbolem ${}^{S}\!/_{\sim}$). W zdefiniowanej wcześniej relacji, dotyczącej wielokątów, poszczególny klasy abstrakcji będą zbiorami zawierającymi kolejne n-kąty (tzn. $[\triangle]_\sim =$ zbiór wszystkich trójkątów, $[\square]_\sim =$ zbiór wszystkich czworokątów itd.).

1.2 Grupy

Na wykładzie poznaliśmy definicję *grupy.* Jest to zbiór G, „wyposażony” dodatkowo w działanie $\oplus$, czyli funkcję $\oplus : G \times G \to G$. Działanie to musi dodatkowo spełniać trzy aksjomaty:

1. Jest łączne, to znaczy dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzi równość:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\,,$$

2. Istnieje element neutralny w grupie G, to znaczy istnieje $e \in G$ takie, że dla dowolnego $a \in G$ zachodzi:

$$a \oplus e = e \oplus a = a,$$

3. Dla dowolnego $a \in G$ istnieje element odwrotny $-a \in G$, to znaczy taki, że:

$$a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = e.$$

Szczególnie ważna dla nas jest grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$, czyli taka, której elementami są liczby całkowite $\{0, 1, 2, ..., p\}$, a wynikiem działania $+$ jest wynik „klasycznego" dodawania, jednak modulo ustalona liczba naturalna dodatnia p, np.:

$$\text{w grupie } \mathbb{Z}_5: \qquad 3 + 4 = 2,$$

$$\text{w grupie } \mathbb{Z}_7: \qquad 1 - 5 = 3.$$

2 Zadania na ćwiczenia

1. Wypiszcie na tablicy imiona i nazwiska wszystkich osób obecnych na ćwiczeniach, ich miesiąc urodzenia i kolor oczu, a także szkołę. Niech G_i, gdzie i jest numerem Waszej grupy, będzie zbiorem osób z grupy obecnych dziś. Ustanawiamy następujące relacje $\sim_{\mathcal{I}}, \sim_{\mathcal{M}}, \sim_{\mathcal{K}}, \sim_{\mathcal{S}}$ na zbiorze G_i:
a) $\text{osoba}_1 \sim_{\mathcal{I}} \text{osoba}_2$ jeżeli osoby te mają to samo imię (możemy dopuścić imiona o różnej pisowni, np. Igor i Ihor - zdecydujcie!),
b) $\text{osoba}_1 \sim_{\mathcal{M}} \text{osoba}_2$ jeżeli osoby te są urodzone w tym samym miesiącu,
c) $\text{osoba}_1 \sim_{\mathcal{K}} \text{osoba}_2$ jeżeli osoby te mają ten sam kolor oczu.
d) $\text{osoba}_1 \sim_{\mathcal{S}} \text{osoba}_2$ jeżeli osoby te chodzą do tej samej szkoły.
Czy są to relacje równoważności? Uzasadnij. Jeśli tak, wypisz klasy abstrakcji każdej z nich.
Zaproponuj inna relację równoważności na tym samym zbiorze.

2. Sprawdź, czy dla danego zbioru X relacja $\sim$ jest na nim relacją równoważności, jeśli:
a) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b mają ten sam ulubiony zespół muzyczny,
b) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ jest w tym samym wieku co b,
c) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ waży, z dokładnością do 1 kg, tyle samo co b,
d) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b są rodzeństwem,
e) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b mają tego samego ojca,
f) $X =$ zbiór wszystkich ludzi świata ☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b mają wspólnego dziadka,
g) $X =$ zbiór wszystkich miejscowości w Polsce $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b są w jednym województwie,
h) $X =$ zbiór wszystkich miejscowości w Polsce $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b są w sąsiednich województwach,
i) $X =$ zbiór wszystkich piosenek świata☺ $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b są śpiewane w tym samym języku,
j) $X =$ zbiór wszystkich melodii $\quad a \sim b \Leftrightarrow a$ i b zawierają przynajmniej jeden takt tych samych dźwięków,
k) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad a \sim b \Leftrightarrow a \mid b$,

l) $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $a \sim b \Leftrightarrow a \leqslant b$,
m) $X = \mathbb{N}$ $a \sim b \Leftrightarrow a \neq b$,
n) $X = \mathbb{N}$ $a \sim b \Leftrightarrow a$ jest tej samej parzystości, co b,
o) $X = \mathbb{N}$ $a \sim b \Leftrightarrow a$ i b dają tę samą resztę z dzielenia przez 13,
p) $X = \mathbb{N}$ $a \sim b \Leftrightarrow 2 \mid ab$,
q) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $a \sim b \Leftrightarrow ab > 0$,
r) $X = \mathbb{N}$ $a \sim b \Leftrightarrow a$ i b mają taki sam zbiór dzielników pierwszych.

3. Dla tych relacji z zadania 2, które są relacjami równoważności, wyznacz ich klasy abstrakcji.

4. Niech $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Zdefiniujmy na zbiorze A relację $\sim$, jako:

$$x \sim y \Leftrightarrow 5 \mid \left(x^2 - y^2\right).$$

Sprawdź, czy jest to relacja równoważności. Jeśli tak, wyznacz klasy abstrakcji poszczególnych elementów zbioru A w relacji $\sim$ oraz zbiór ilorazowy ${}^{A}\!/\!_{\sim}$.

5. $(*)$ Niech S będzie zbiorem, na którym zdefiniowano relację równoważności $\sim$. Udowodnij, że jeśli $a, b \in S$ są dwoma różnymi elementami (to znaczy $a \neq b$), to:

$$[a]_\sim = [b]_\sim \vee [a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing.$$

Kiedy zachodzi każdy z przypadków?

6. Rozpatrzmy relację $\sim$ na zbiorze $\mathbb{N}$ zdefiniowaną jako:

$$a \sim b \Leftrightarrow 2 \mid a + b.$$

Wyznacz wszystkie klasy abstrakcji w tej relacji oraz zbiór ilorazowy ${}^{\mathbb{N}}\!/\!_{\sim}$. Ile mają one elementów?

7. Znajdź relację równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$, która ma dokładnie 5 klas abstrakcji – dwie jednoelementowe, dwie dwuelementowe i jedną, która ma nieskończenie wiele elementów.

8. Znajdź relację równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$, która ma dokładnie dwie klasy abstrakcji – obie nieskończone.

9. Niech $\sim_1$ i $\sim_2$ będą relacjami równoważności na zbiorze S. Zdefiniujmy następującą relację:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \sim_1 b \vee a \sim_2 b.$$

Czy $\sim$ jest relacją równoważności na S?

10. Znajdź wszystkie relacje równoważności na zbiorze $\{1,2,3\}$.

11. Sprawdź czy $(G, \oplus)$ jest grupą, gdzie działanie zdefiniujemy :

$$a \oplus b = (a+1) - (b-3) + 7,$$

a za G przyjmiemy zbiór:

a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N}$

12. Uzupełnij „tabliczkę dodawania” w grupie $\mathbb{Z}_6$:

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

13. Na wykładzie rozpatrywaliśmy grupę $(\mathbb{Z}_p, +)$, w której działaniem było dodawanie liczb modulo p. Analogicznie do dodawania możemy wykonywać również inne operacje algebraiczne modulo p, np. mnożenie. Wówczas, elementem odwrotnym dla różnego od zera $q \in \mathbb{Z}_p$ będzie taka liczba $q^{-1} \in \mathbb{Z}_p$, że $q \cdot q^{-1} = 1 \mod p$. Przykładowo, modulo 5 $3^{-1} = 2$, gdyż $3 \cdot 2 = 1 \mod 5$. Oblicz:
a) $2 \cdot 3 \mod 5$,
b) $3 \cdot 4 \cdot 2^{-1} \mod 7$,
c) $2 \cdot 6 \mod 12$.

14. Rozwiąż równanie:
a) $5x + 1 = 4$ w $\mathbb{Z}_7$
b) $7x + 2 = 3 - 2x$ w$\mathbb{Z}_9$
c) $x + 2 = -11x - 10$ w $\mathbb{Z}_{12}$.

15. $(*)$ Wszystkie dotychczas omawiane grupy miały to do siebie, że działanie w nich było przemienne (to znaczy dla dowolnych elementów $a, b \in (G, \oplus)$ zachodziła równość $a \oplus b = b \oplus a$). Takie grupy nazywamy *grupami abelowymi* lub *grupami przemiennymi.* Tak być nie musi! Przykładem grupy, która nie jest przemienna jest grupa D_5 będąca grupą *izometrii pięciokąta foremnego*, to znaczy zawiera ona obroty tegoż pięciokąta o kąty $0°$, $72°$, $144°$, $216°$ i $288°$, a także symetrie wzdłuż osi symetrii, przechodzących przez każdy wierzchołek pięciokąta. Działaniem w tej grupie jest składanie przekształceń. Udowodnij, że grupa ta rzeczywiście nie jest abelowa.

16. Grupa z poprzedniego zadania opierała się na pewnych „zamianach kolejności” ciagu wierzchołków pięciokąta. Takie zamiany nazywamy *permutacjami.* Rozpatrywane przez nas permutacje były jednak bardzo szczególne – zależało nam, aby nie zamieniając miejscami wierzchołki zachować strukturę pięciokąta. Możemy jednak rozpatrzyć grupę, oznaczaną jako S_5, która zawiera dowolne permutacje zbioru pięcioelementowego. Ogólniej – dla zbioru n-elementowego, możemy rozpatrzyć grupę S_n, zawierającą wszystkie jego permutacje. Udowodnij, że rzeczywiście jest to grupa.

17. Analogicznie do zadania 5. możemy zdefiniować grupę izometrii kwadratu, oznaczymy ją jako D_4. Podobnie jak D_5 nie jest to grupa abelowa. Istnieją w niej jednak izometrie, które są przemienne ze wszystkimi izometriami w grupie. Zbiór elementów, które są przemienne ze wszystkimi w grupie G nazywamy *centrum grupy* i oznaczmy $Z(G)$. Wyznacz centrum grupy D_4.

18. Znajdź wszystkie podgrupy grupy $\mathbb{Z}_{12}$.

3 Praca domowa

3.1 Zadania za 1 punkt

19. Niech S będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Sprawdź czy relacja:

$$l \sim k \Leftrightarrow l \parallel k$$

jest relacją równoważności.

20. Niech S będzie zbiorem poprawnych słów w języku polskim. Sprawdź czy relacja:

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow s_1 \text{ i } s_2 \text{ mają po tyle samo liter}$$

jest relacją równoważności.

21. Niech $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (zbiór par (a, b) gdzie $a, b \in \mathbb{N}$). Sprawdź czy relacja:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

jest relacją równoważności.

22. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem określonym jako $a \oplus b = a + b + 5$ jest grupą.

23. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem określonym jako $a \oplus b = ab - a - b + 2$ jest grupą.

3.2 Zadania za 2 punkty

24. Zdefiniujmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

Opisz wszystkie jej klasy abstrakcji.

25. Niech $S = \mathbb{R}^2$ (tzn. S jest zbiorem punktów na płaszczyźnie). Zdefiniujmy relację równoważności pomiędzy punktami w S w następujący sposób:

$$p \sim q \Leftrightarrow p \text{ i } q \text{ są w tej samej odległości od punktu } (0, 0).$$

Czym są klasy abstrakcji w tej relacji? Naszkicuj je.

26. Niech S będzie zbiorem wszystkich funkcji liniowych (to znaczy funkcji postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$). Wyznacz klasy abstrakcji relacji:

$$f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0).$$

27. Pokaż, że relacja na zbiorze $\mathbb{Z}$ zadana jako

$$a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \mod p$$

jest relacją równoważności. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$ oraz zbiór ilorazowy $\mathbb{Z}/\sim$

3.3 Zadania za 3 punkty

28. Niech $\sim_1$ i $\sim_2$ będą relacjami równoważności na zbiorze S. Zdefiniujmy następującą relację:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \sim_1 b \wedge a \sim_2 b.$$

Czy $\sim$ jest relacją równoważności na S?

29. Niech S będzie zbiorem skończonym, a $\sim$ relacją równoważności na tym zbiorze. Pokaż, że jeśli wszystkie klasy abstrakcji relacji $\sim$ mają tyle samo elementów, to moc zbioru ilorazowego $S/\sim$ dzieli moc zbioru S.

30. Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to jedyne podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_p, +)$ to podgrupa trywialna oraz cała grupa $(\mathbb{Z}_p, +)$.

31. Rozwiąż równanie:

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

w $\mathbb{Z}_3$ oraz $\mathbb{Z}_5$.