Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 3
Szeregi geometryczne i kresy zbiorów

Daniel Laskowski

kwiecień 2024

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie dowiedzieliśmy się czym jest *szereg geometryczny*, czyli suma w postaci:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... =: \sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}.$$

Okazało się, że taki szereg jest zbieżny, gdy $|q| < 1$, a jego suma wynosi wówczas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{a}{1-q}.$$

Poznaliśmy również pojęcie zbioru ograniczonego – powiedzieliśmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez $M \in \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego elementu $x \in A$ zachodzi nierówność $x \leqslant M$ oraz, że jest ograniczony z dołu przez $m \in \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego elementu $x \in A$ zachodzi nierówność $x \geqslant m$. Zdefiniowaliśmy również kresy zbioru – odpowiednio górny ($\sup A$), jako najmniejsze ograniczenie górne i dolny ($\inf A$), jako największe ograniczenie dolne.

2 Zadania na ćwiczenia

1. Zapisz za pomocą symbolu sumy:
a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... =$
b) $3 + 2 + 1\frac{1}{3} + ... =$
c) $2022 + 337 + 56\frac{1}{6} + ... =$
d) $6 + 4 + 3 + 2 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + ... =$
e) $6 - 4 + 3 - 2 + \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + ... =$

2. Zapisz za pomocą symbolu sumy:
a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... =$
b) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + ... =$
c) $1 + \sqrt{2} + 2 + ... =$

3. Oblicz wartości sum z zadań 1 i 2.

4. Spróbujmy zsumować szereg:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

Mamy $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0$, jednocześnie $1\,(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 1$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy: $S = \frac{1}{2}$. Który wynik jest prawdziwy? Jakie wnioski możesz wyciągnąć z tego zadania?

5. Udowodnij, że szereg harmoniczny:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

nie jest zbieżny.

6. Wyznacz kresy zbiorów:
a) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$
b) $(0, 1)$
c) $[0, 1]$
d) $\mathbb{R}$
e) $\{-1, -4, -9, ...\}$
f) długości odcinków $\left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$ (*),
g) pól prostokątów o bokach 1 i $\frac{1}{n}$ (*),
h) pól prostokątów o bokach n i $\frac{2}{n}$ (*),
i) pól prostokątów o bokach n i $\frac{1}{n^2}$ (*),
j) pól prostokątów o bokach 2^n i $\frac{1}{n}$ (*).
(*) gdzie $n \in \mathbb{N}$, $(n \neq 0)$

7. Niech dany będzie zbiór ograniczony $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz liczba $t \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że zbiór:

$$A + t \coloneqq \{x + t : x \in A\}$$

też jest ograniczony oraz:

$$\sup (A + t) = \sup A + t,$$
$$\inf (A + t) = \inf A + t.$$

3 Praca domowa

3.1 Zadania za 1 punkt

8. Zapisz za pomocą symbolu sumy (każdy podpunkt warty jest 1 punkt):
a) $5 + 1 + \frac{1}{5} + ... =$
b) $177 - 59 + 19\frac{2}{3} - ... =$
c) $1 + 2 + 3 + 4 + ... =$.

3.2 Zadania za 2 punkty

9. Oblicz sumy nieskończone:
a) $5 + 1 + \frac{1}{5} + ... =$
b) $177 - 59 + 19\frac{2}{3} - ... =$
c) $1 + 2 + 3 + 4 + ... =$.

10. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano okrąg. Następnie w ten okrąg wpisano nowy trojkąt równoboczny, w który znowu wpisano okrąg, w który ponownie wpisano trójkąt itd. Wyznacz sumę pól wszystkich okręgów (jest ich nieskończenie wiele).

11. Wyznacz kresy zbiorów:
a) zbiór wyrazów ciągu $\left(\sqrt{2}\right)^n$
b) długości odcinków $\left[\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$
c) $(0, +\infty)$.

3.3 Zadania za 3 punkty

12. Udowodnij, że suma szeregu geometrycznego jest ujemna wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy wyraz jest ujemny.

13. Niech dany będzie zbiór ograniczony $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz liczba $t > 0$. Udowodnij, że zbiór:

$$t \cdot A \coloneqq \{tx : x \in A\}$$

też jest ograniczony oraz:

$$\sup (t \cdot A) = t \cdot \sup A,$$
$$\inf (t \cdot A) = t \cdot \inf A.$$