Matematyka dla Ciekawych Świata XV — lista 4
Miara i całka

Daniel Laskowski

kwiecień 2024

1 Powtórzenie z wykładu

Na wykładzie pojawiło się pojęcie miary Lebesgue'a, w której mierzenie odbywa się poprzez pokrywanie zbioru odpowiednio wymiarowymi kostkami. Ponadto, powiedzieliśmy czym w ogólności jest miara oraz miara zewnętrzna. Przypomnijmy:
Powiemy, że rodzina $\mathcal{M}$ podzbiorów zbioru X jest σ-ciałem zbiorów mierzalnych, gdy:

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$
3. Jeśli $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{M}$, to $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \in \mathcal{M}$.

oraz:
Niech $\mathcal{M}$ będzie pewnym σ-ciałem pozdbiorów zbioru X. Miarą nazwiemy funkcję $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ taką, że:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$

Samo σ-ciało to rodzina zbiorów, które da się zmierzyć i spełnia poniższe własności:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Ponadto sformułowaliśmy łatwe kryterium – warunek Carathéodory'ego, który pozwala sprawdzić, czy dany zbiór jest mierzalny. Powiemy, że zbiór A spełnia warunek Carathéodory'ego, gdy dla dowolnego zbioru $Z \subseteq X$:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

2 Zadania na ćwiczenia

1. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{5}{4}\right] \cup \left[2, \frac{17}{8}\right] \cup ...$$

2. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru $\{0\}$.

3. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru Cantora.

4. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru liczb naturalnych.

5. Udowodnij, że:
a) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$,
b) Jeśli $A, B \subseteq [0,1]$ oraz $\ell_1(A) + \ell_1(B) > 1$, to $A \cap B \neq \varnothing$.

6. Oblicz miarę Lebesgue'a zbioru:

$$\left[0, \frac{3}{2}\right] \cup \left[2, 2\frac{1}{3}\right] \cup \left[3, 3\frac{1}{4}\right] \cup \left[4, 4\frac{1}{5}\right] \cup ...$$

7. Oblicz pole i obwód trójkąta Sierpińskiego.

8. Oblicz pole i objętość gąbki Mengera.

9. Oblicz miarę zbioru Smitha-Volterry-Cantora (zwanego też tłustym zbiorem Cantora), czyli zbioru powstałego poprzez usunięcie ze środka odcinka $[0, 1]$ odcinka długości $\frac{1}{4}$, następnie ze środka dwóch pozostałych odcinków usuwamy zbiory długości $\frac{1}{16}$ itd.

10. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem, który zawiera co najmniej 2 elementy oraz $x_0 \in A$. Zdefiniujmy $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$:

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, \text{ gdy } E \subseteq A \text{ i } x_0 \notin E \\ 1, \text{ gdy } E \subseteq A \text{ i } x_0 \in E \\ +\infty, \text{ gdy } E \setminus A \neq \varnothing \end{cases}.$$

Udowodnij, że μ to miara zewnętrzna i wyznacz jakie zbiory są mierzalne względem μ.

11. Niech A_1, A_2, A_3... będą zbiorami miary zero (niekoniecznie rozłącznymi). Udowodnij, że zbiór:

$$A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

też jest miary zero.

12. Niech A będzie zbiorem mierzalnym oraz B będzie miary zero. Udowodnij, że $\mu(A \setminus B) = \mu(A \cup B) = \mu(A)$.

13. Oblicz:

a) $\displaystyle\int_1^7 x \, dx$

b) $\displaystyle\int_0^5 3x + 2 \, dx$

c) $\displaystyle\int_{-2024}^{2024} x \, dx$

d) $\displaystyle\int_{-2024}^{2024} |x| \, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{10} \chi_S(x) \, dx$, gdzie $S = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [2n, 2n+1]$,

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1} \, dx$, wiedząc, że $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \xrightarrow{n \to +\infty} \ln 2$.

3 Praca domowa

3.1 Zadania za 1 punkt

14. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru liczb całkowitych.

15. Wyznacz miarę Lebesgue'a zbioru analogicznego do zbioru Cantora, gdzie zamiast środkowej $\frac{1}{3}$ odcinka usuwamy $\frac{1}{4}$.

3.2 Zadania za 2 punkty

16. Oblicz:

$$\int_0^a x^3 \, dx.$$

Może być pomocny wzór:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{4}\right)^2.$$

17. Oblicz pole powierzchni dywanu Sierpińskiego, czyli zbioru powstałego w następujący sposób: kwadrat o boku 1 dzielimy na dziewięć przystających kwadratów i usuwamy środkowy. Następnie pozostałe 8 kwadratów ponownie dzielimy na 9 przystających i usuwamy środkowe itd.

3.3 Zadania za 3 punkty

18. Niech $\delta_0 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ będzie zdefiniowana jako:

$$\delta_0(A) := \begin{cases} 0, \text{ gdy } 0 \notin A \\ 1, \text{ gdy } 0 \in A \end{cases}.$$

Udowodnij, ze δ_0 jest miarą.

19. Dana jest pewna liczba $m \in [0, 1]$. Skonstruuj zbiór $A \subseteq [0, 1]$ taki, że:

1° $\ell_1(A) = m$

2° Dla dowolnego odcinka $(a, b) \subseteq [0, 1]$ zachodzi:

$$(a, b) \cap A \neq \varnothing.$$

20. Wyznacz wzór na pole koła o promieniu r. Uwaga: można uznać, że wiemy ile wynosi miara dwuwymiarowego trójkąta.